



VISIONIAS
INSPIRING INNOVATION
ABHYAAS MAINS

गणित (प्रश्न-पत्र II)
Mathematics (Paper-II)

निर्धारित समय: तीन घंटे
Time Allowed: **Three Hours**

(Test Code : 3125)

अधिकतम अंक: 250
Maximum Marks: 250

सामान्य अनुदेश

इस प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका में 88+8 पृष्ठ हैं। प्रश्न-पत्र, क्यू.सी.ए. पुस्तिका के अंत में संलग्न है, जो अलग (वियोज्य) किया जा सकता है और उम्मीदवार परीक्षा के उपरांत अपने साथ ले जा सकते हैं।

रफ कार्य के लिए, इस पुस्तिका के अंत में खाली पृष्ठ दिया गया है।

पुस्तिका प्राप्त होने पर, कृपया यह जांच कर लें कि इस क्यू.सी.ए. पुस्तिका में कोई कमी न हो, फटा हुआ पृष्ठ न हो अथवा कोई पृष्ठ गायब न हो इत्यादि। यदि ऐसा हो, तो इसके बदले नई क्यू.सी.ए. पुस्तिका प्राप्त कर लें।

General Instructions

This Question-Cum-Answer (QCA) Booklet contains 88+8 pages. Question Paper in detachable form is available at the end of the QCA Booklet which can be taken away by the candidate after examination.

For rough work, blank page has been provided at the end of this Booklet.

On receipt of the Booklet, please check that this QCA Booklet does not have any shortcomings, torn or missing pages etc. If, so, get it replaced with a fresh QCA Booklet.

(उम्मीदवार द्वारा भरा जाएगा/To be filled by the Candidate)

पंजीकरण सं./Registration No. : 01142925

अभ्यर्थी का नाम/Name of Student : Akash Trivedi

माध्यम: हिंदी/अंग्रेजी
Medium: Hindi/English

English

तारीख
Date

1/09/24

गणित (प्रश्न-पत्र II)
Mathematics (Paper-II)

केंद्र
Centre

Delhi

SD 1

निरीक्षक के हस्ताक्षर
Invigilator's Signature

Manisha

	<p style="text-align: center;">महत्वपूर्ण अनुदेश</p> <p>उम्मीदवारों को नीचे उल्लिखित निर्देश सावधानी से पढ़ लेने चाहिए। किसी भी निर्देश का उल्लंघन करने पर उम्मीदवारों को मिलने वाले अंकों में कटौती, उम्मीदवारी रद्द या आयोग के परवर्ती परीक्षाओं के लिए वर्जित करने इत्यादि के रूप में दण्डित किया जा सकता है।</p>	<p style="text-align: center;">Important Instructions</p> <p>Candidates should read the undermentioned instructions carefully. Violation of any of the following instructions may entail penalty in the form of deduction of marks, cancellation of candidature, debarment from further Examination of the Commission etc.</p>
1	<p>(क) अपना पंजीकरण सं. एवं अन्य विवरण केवल प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका (क्यू.सी.ए.) में उम्मीदवार के लिए निर्धारित स्थान पर ही लिखें।</p> <p>(ख) इस पुस्तिका में अन्यत्र कहीं भी अपना नाम, पंजीकरण सं., मोबाइल नं., पता अथवा प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका (क्यू.सी.ए.) संख्या न लिखें जिससे आपकी पहचान का खुलासा हो।</p>	<p>(a) Write your Registration Number and other details only in the space provided in the Question-Cum-Answer (QCA) Booklet for candidates.</p> <p>(b) Do not disclose your identity in any manner such as, by writing your Name, Registration number, Mobile number, Address, Question-Cum-Answer (QCA) Booklet No. etc. elsewhere in the Booklet</p>
2	<p>अपनी प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में कहीं भी प्रश्नों के वास्तविक उत्तर के अतिरिक्त कुछ न लिखें जैसे कि कोई कविता/दोहा, अभद्र या अपमानजनक अभिव्यक्ति इत्यादि और न ही कोई ऐसा चिन्ह/निशान बनाएं जिसका उत्तर से सम्बन्ध न हो।</p>	<p>Do not write in the QCA Booklet anything other than the actual answer such as couplet, obscene, abusive expression etc., nor put any sign/mark having no relevance to the answer.</p>
3	<p>परीक्षक को प्रत्यक्ष/अप्रत्यक्ष रूप से कोई भी प्रार्थना/धमकी भरी बातें न लिखें।</p>	<p>Do not make any direct/indirect appeal/threat to the examiner.</p>
4	<p>उत्तर अस्पष्ट अथवा गंदी लिखावट में न लिखें। इस प्रकार के उत्तर का मूल्यांकन नहीं भी किया जा सकता है।</p>	<p>Do not write answers in bad/illegible handwriting. Such answers may not be evaluated.</p>
5	<p>उत्तर स्याही में ही लिखें। उत्तर लिखने के लिए पेंसिल का उपयोग न करें, हालांकि आरेख, चित्र इत्यादि बनाने के लिए पेंसिल का उपयोग किया जा सकता है।</p>	<p>Write answers in ink only. Do not use pencil for writing the answers. However, pencil may be used for drawing diagrams, sketches, etc.</p>
6	<p>प्रवेश पत्र में उल्लेख किए गए माध्यम के अलावा अन्य किसी माध्यम में उत्तर न लिखें। अधिकृत और अनधिकृत की मिली जुली भाषा का भी उपयोग न करें।</p>	<p>Do not write answers in medium other than the authorized medium in the Admission Certificate. Do not use mixed language either i.e. authorize and unauthorized media together for writing answers.</p>
7	<p>प्रश्नों के उत्तर ठीक उसके नीचे दिए गए निर्धारित स्थान पर ही लिखें। निर्धारित स्थान के अलावा किसी अन्य स्थान पर लिखे गए उत्तर का मूल्यांकन नहीं किया जाएगा।</p>	<p>Write answer at the specific space (right below the question) only. Answers written elsewhere at unspecified places in the booklet shall not be evaluated.</p>
8	<p>यदि आप अपने किसी उत्तर को रद्द करना चाहते हैं तो उसे पेन से काट दें तथा उस पर "रद्द" लिख दें, अन्यथा उसका मूल्यांकन किया जा सकता है।</p>	<p>If you wish to cancel any work, draw your pen through it and write "Cancelled" across it, otherwise it may be valued.</p>

कार्यालय के प्रयोग हेतु For Official Use	कार्यालय के प्रयोग हेतु For Official Use
<p>परीक्षक के हस्ताक्षर Signature of Examiner(s)</p>	

प्राप्तांक के विवरण (परीक्षक द्वारा भरा जाए)/ Marks Details (To be filled by the Examiner(s))

प्रश्न सं. Q. No.	a	b	c	d	e	अंक Marks	
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
सकल योग (A+B) / GRAND TOTAL							



VISIONIAS
INSPIRING INNOVATION
ABHYAAS MAINS

गणित (प्रश्न-पत्र II)

Mathematics (Paper II)

निर्धारित समय: तीन घंटे
Time Allowed: **Three Hours**

(Test Code : 3125)

अधिकतम अंक: 250
Maximum Marks: 250

प्रश्न-पत्र संबंधी विशेष अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें:

इसमें आठ प्रश्न हैं तथा हिंदी और अंग्रेज़ी में छपे हुए हैं।

प्रश्न संख्या 1 और 5 अनिवार्य हैं तथा बाकी में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के लिए नियत अंक उसके सामने सूचित हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

प्रश्नों में शब्द-सीमा, जहाँ विनिर्दिष्ट है, का अनुसरण किया जाना चाहिए।

जहाँ आवश्यक हो, अपने उत्तरों को उपयुक्त चित्रों/मानचित्रों तथा आरेखों द्वारा दर्शाइए। इन्हें प्रश्न का उत्तर देने के लिए दिए गए स्थान में ही बनाना है।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। आंशिक रूप से दिए गए प्रश्नों के उत्तर को भी मान्यता दी जाएगी यदि उसे काटा न गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़े गए कोई पृष्ठ अथवा पृष्ठ के भाग को पूर्णतः काट दीजिए।

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

There are **EIGHT** questions and printed in **HINDI & ENGLISH**.

Questions no 1 and 5 are compulsory and out of the remaining, any **THREE** are to be attempted.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Word limit in questions, wherever specified, should be adhered to.

Illustrate your answers with suitable sketches/maps and diagrams, wherever considered necessary. These shall be drawn in the space provided for answering the question itself.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

EVALUATION INDICATORS

1. Contextual Competence
2. Content Competence
3. Language Competence
4. Introduction Competence
5. Structure - Presentation Competence
6. Conclusion Competence

Overall Macro Comments / feedback / suggestions on Answer Booklet:

1.

2.

3.

4.

5.

6.

All the Best

1. (a)

एक कम्पनी के एक विभाग के पांच कर्मचारियों को पांच कार्य सम्पन्न करने हैं। जितना समय (घंटों में) एक व्यक्ति एक कार्य को सम्पन्न करने के लिए लेता है, वह प्रभाविता आव्यूह में दिया गया है। इन पांच कर्मचारियों को इन सभी कार्यों को इस तरह निर्धारित कीजिए जिससे कि समस्त कार्य सम्पन्न करने का समय न्यूनतम हो:

		कर्मचारी				
		I	II	III	IV	V
कार्य	A	10	5	13	15	16
	B	3	9	18	13	6
	C	10	7	2	2	2
	D	7	11	9	7	12
	E	7	9	10	4	12

A department of a company has five employees with five jobs to be performed. The time (in hours) that each man takes to perform each job is given in the effectiveness matrix. Assign all the jobs to these five employees to minimize the total processing time.

		Employees				
		I	II	III	IV	V
Jobs	A	10	5	13	15	16
	B	3	9	18	13	6
	C	10	7	2	2	2
	D	7	11	9	7	12
	E	7	9	10	4	12

10

उम्मीदवारों को इस शक्ति में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

उम्मीदवारों को
इस ह्राशिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

1. (b)

मान लीजिए कि G एक परिमित समूह है तथा H और K , G के उप-समूह हैं, इस प्रकार कि $K \subset H$ है। दर्शाइए कि $(G:K) = (G:H)(H:K)$

Let G be a finite group, H and K subgroups of G such that $K \subset H$. Show that $(G:K) = (G:H)(H:K)$.

10

we know that,

⊙ If $G_1 \cong G_2$ then

$$\frac{G_1}{\text{Ker}(f)} \cong G_2 \quad \text{--- (1)}$$

Now taking $G_1 = \frac{G}{H}$ and $G_2 = \frac{G}{K}$

To show these exist ^{onto} homomorphism

$$f: \frac{G}{H} \rightarrow \frac{G}{K}$$

$$f(hx) = kx$$

now,

f is well-defined

As, if $x_1 = x_2$

$$\Rightarrow kx_1 = kx_2$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

f is onto ~~as~~ for $kx \in \frac{G}{K}$

$\exists x$ such $f(hx) = kx$

Further

$$f(hx_1 \cdot hx_2) = f(hx_1, x_2)$$

$$f(hx_1, hx_2) = f(kx_1, kx_2) = kx_1, kx_2$$

$$\therefore f(hx_1, hx_2) = f(hx_1) \circ f(hx_2)$$

onto -

$\therefore \frac{G}{H}$ is a homomorphism $\frac{G}{K}$.

Now, calculating kernel of

$$\frac{G}{H} = \{hx \mid x \in G\}$$

$$hx = H$$

$$\therefore x \in H \quad \& \quad x \in G$$

$$\therefore x \in K \quad \text{as} \quad K \subset H$$

$$\therefore \ker\left(\frac{G}{H}\right) = \frac{H}{K}$$

$$\therefore \text{by 1, } \frac{\frac{G}{H}}{\ker\left(\frac{G}{H}\right)} \cong \left(\frac{G}{K}\right)$$

$$\therefore \text{putting } \ker\left(\frac{G}{H}\right) = \frac{H}{K}$$

we have

$$\boxed{\frac{\frac{G}{H}}{\frac{H}{K}} \cong \frac{G}{K}}$$

hence proved

1. (c)

दर्शाए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{\pi+1}\right)^n n^6$ अभिसारी है।

Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{\pi+1}\right)^n n^6$ is convergent.

Given

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{\pi+1}\right)^n n^6$$

$$a_n = \left(\frac{\pi}{\pi+1}\right)^n n^6$$

Applying ratio test,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(\frac{\pi}{\pi+1}\right)^n n^6}{\left(\frac{\pi}{\pi+1}\right)^{n+1} (n+1)^6}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6}{(n+1)^6} \cdot \frac{\pi+1}{\pi}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6}{n^6 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^6} \cdot \frac{\pi+1}{\pi}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\pi+1}{\pi} \quad \left(\because \text{as } n \rightarrow \infty \frac{1}{n} \rightarrow 0\right)$$

Now, as $\frac{\pi+1}{\pi} > 1$

\therefore By ratio test

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{\pi+1}\right)^n n^2$ is convergent

उम्मीदवारों को
इस हाशिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

1. (d)

आंशिक अवकल समीकरण $(2D^2 - 5DD' + 2D'^2)z = 24(y-x)$ को हल कीजिए।Solve the partial differential equation $(2D^2 - 5DD' + 2D'^2)z = 24(y-x)$.

10

Given,
writing Auxiliary equation,

$$(D^2 - \frac{5DD'}{2} + D'^2)z = 12(y-x)$$

$$D \rightarrow m \quad D' \rightarrow 1$$

$$\left(m^2 - \frac{5m}{2} + 1\right) = 0$$

$$m = 2, \quad m = \frac{1}{2}$$

$$\therefore z_c = \phi_1(y+2x) + \phi_2\left(y + \frac{x}{2}\right)$$

Now, to calculate particular integral

$$y_p = \frac{1}{(D-2D')(D-\frac{D'}{2})} 12 \left(\frac{-x+y}{2}\right)$$

as $f(D)$ is homogeneous

$$\therefore y_p = \frac{1}{\left(\frac{P(a,b)}{2}\right)} \iint \phi(v) dv$$

here $a = -1, b = 1$

उम्मीदवारों को
इस हार्जिन में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

$$\therefore y_p = \frac{1}{(-1-2)\left(-1-\frac{1}{2}\right)} \iint 12v \, dv$$

$$= \frac{1}{(-3)\left(-\frac{3}{2}\right)} 12 \cdot \int \frac{v^2}{2} \, dv$$

$$= \frac{1}{\frac{9}{2}} \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{v^3}{3}$$

$$= \frac{12 \times 2 v^3}{6 \times 9}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{9} v^3$$

Replacing v by $-x+y$

$$y_p = \frac{4}{9} (-x+y)^3$$

$$\therefore y = \phi_1(y+2x) + \phi_2\left(y+\frac{x}{2}\right) + \frac{4}{9}(-x+y)^3$$

1. (e) गुणजावली $4Z + 6Z$ को पूर्णाकीय डोमेन (प्रांत) Z में एक मुख्य गुणजावली के रूप में व्यक्त कीजिए।
Express the ideal $4Z + 6Z$ as a principal ideal in the integral domain Z .

10

उम्मीदवारों को इस हार्फ में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

As, given

$4Z + 6Z$ is ideal in Integral

Domain $Z \in Z_1$

$$Z_1 = 4\langle a \rangle + 6\langle b \rangle$$

$$Z_1 = 4na + 6mb$$

$$= 2(2na + 3mb)$$

Now assign $2na + 3mb = p$

$$Z_1 = 2p$$

$\therefore \langle 2 \rangle$ generates all element

of Z

\therefore Ideal can be express as

$$Z = 2Z$$

उम्मीदवारों को
इस हार्शिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

2. (a)

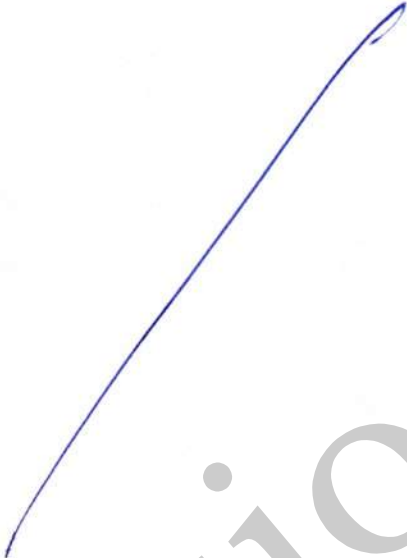
दर्शाइए कि समूह $Z_5 \times Z_7$ और Z_{35} तुल्यकृतिक हैं।

Show that the groups $Z_5 \times Z_7$ and Z_{35} are isomorphic.

15

उम्मीदवारों को
इस हार्जिन में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

उम्मीदवारों को
इस क्राशिए में
नही लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin


VisionIAS

उम्मीदवारों को
इस क्षतिप में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

2. (b)

दर्शाइए कि चार अक्षरों की एकांतर समूह A_4 में कोटि 6 की कोई उपसमूह नहीं है।

Show that the alternating group of four letters A_4 has no subgroup of order 6.

15

उम्मीदवारों को
इस इलाक़े में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

उम्मीदवारों को
इस क्षति लिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

उम्मीदवारों को
इस कक्षिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

2. (c)

दर्शाइए कि p^2 का समूह अबेली है, जहां p एक अभाज्य संख्या है।

Show that a group of p^2 is abelian, where p is a prime number.

10

उम्मीदवारों को
इस हार्जिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

उम्मीदवारों को
इस ह्राशिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

2. (d)

मान लीजिए R एक अद्वितीय गुणनखंडन प्रांत (U.F.D) है, तब सिद्ध कीजिए कि $R[x]$ भी U.F.D है।
Let R be a Unique Factorization Domain (U.F.D), then prove that $R[x]$ is also U.F.D.

10

उम्मीदवारों को
इस हार्शिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

उम्मीदवारों को
इस ह्राशिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin


VisionIAS

3. (a)

दर्शाइए कि श्रृंखला $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} \right)$ सशर्त रूप से अभिसरण है (यदि आप इसे दर्शाने के लिए किसी प्रमेय का उपयोग करते हैं तब आपको उस प्रमेय का प्रमाण देना होगा)।

Show that series $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} \right)$ conditionally convergent (if you use any theorem (s) to show it then you must give a proof of that theorem(s)).

15

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$$

Now, by Leibniz test, we have

$$a_n = (-1)^{n+1}$$

$$S_n = \begin{cases} -1 & n = \text{odd} \\ 0 & n = \text{even} \end{cases}$$

$\therefore S_n$ is ~~bounded~~ ^{finite}

and $b_n = \frac{1}{n^2+1}$ is monotonically decreasing to zero

$\therefore \sum a_n b_n$ is convergent.

$$\begin{aligned} \text{Now, } |S_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^2+1} \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \end{aligned}$$

$$|S_n| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

$$a_n \geq \frac{1}{n^2+1}$$

$$\text{As } b_n = \frac{1}{n^2+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

\therefore By limit comparison Test (LCT)
either both converge or diverge

we know that

now $\sum b_n$ diverges

By LCT

$\therefore a_n$ diverges

~~Now~~, Thus, $|a_n|$ diverges but

a_n converges $\therefore \sum a_n$ conditionally
converges

उम्मीदवारों को
इस हशिरे में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

3. (b)

दर्शाए कि यदि $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3 + n^4 x^2} \right)$ है, तब सभी x के लिए इसका अवकलज

$$S'(x) = -2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+nx^2)^2} \text{ है।}$$

Show that if $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3 + n^4 x^2} \right)$ then its derivative $S'(x) = -2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+nx^2)^2}$, for all x . 15

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^4 x^2}$$

$$\text{Now } a_n = \frac{1}{n^3 + n^4 x^2} < \frac{1}{n^3} = b_n$$

Now, applying Weierstrass M-test as
 $a_n < b_n$ for all n and b_n is
 uniformly
 convergent (by p -test), thus,

$S(x)$ is uniformly convergent

Now, as it is uniformly convergent

So, it can be differentiated term-by-term
manner.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^4 x^2}$$

$$S'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^4 x^2} \right)$$

Now, as it is term by term differentiable

$$S'(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n^3 + n^4 x^2} \right) \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2x \cdot n^4}{(n^3 + n^4 x^2)^2} \quad \left(\because \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} \right)$$

$$= -2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^6 (1 + nx^2)^2} \quad (\because \text{it is not dependent on } n)$$

$$\Rightarrow -2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (1 + nx^2)^2}$$

$$\therefore S'(x) = -2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (1 + nx^2)^2}$$

उम्मीदवारों को
इस कक्ष में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

3. (c)

$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$ के अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $lx + my + nz = 0$ और $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ है। परिणाम की ज्यामितीय व्याख्या कीजिए।

Find the maximum and minimum values of $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$, where $lx + my + nz = 0$ and $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Interpret the result geometrically.

उम्मीदवारों को इस हिसाब में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$$

given $g(x, y, z) = lx + my + nz = 0$

~~h~~ $h(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

Using Lagrange multiplier
 $\lambda(x, y, z, \lambda)$

$$= \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} + \lambda(lx + my + nz)$$

$$+ \mu \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

Now, for extreme

$$t_x = 0, \quad t_y = 0, \quad t_z = 0$$

$$\frac{2x}{a^4} + \lambda(l) + \mu \left(\frac{2x}{a^2} \right) = 0 \quad \dots (1)$$

$$\frac{2y}{b^4} + \lambda(m) + \mu \left(\frac{2y}{b^2} \right) = 0 \quad \dots (2)$$

$$\frac{2z}{c^4} + \lambda(n) + \mu \left(\frac{2z}{c^2} \right) = 0 \quad \dots (3)$$

multiplying (1) by x , (2) by y and (3) by z
and adding,

$$2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) + \lambda(lx + my + nz)$$

using $lx + my + nz = z_0$

$$+ 2\mu\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) + \mu(1) = 0$$

~~f = -u~~

$$f = -u$$

geometrically,

we are find ellipse tangent
maximum distance

उम्मीदवारों को
इस हार्शिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

उम्मीदवारों को
इस हार्थिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

4. (a)

एक रेलगाड़ी, जो कि विश्राम से चलना प्रारंभ करती है, का वेग निम्नलिखित सारणी द्वारा दिया गया है। प्रस्थान से समय की गणना मिनट में तथा वेग की कि० मी०/ घण्टा में की गयी है:

t (मिनट)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
v (कि० मी०/घण्टा)	16	28.8	40	46.4	51.2	32	17.6	8	3.2	0

सिम्पसन के $\frac{1}{3}$ वें नियम का उपयोग करके 20 मिनट में तय की गयी कुल दूरी (लगभग) का आकलन कि० मी० में कीजिए।

The velocity of a train which starts from rest is given by the following table, the time being reckoned in minutes from the start and the velocity in km/hour:

t (minutes)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
v (km/hour)	16	28.8	40	46.4	51.2	32	17.6	8	3.2	0

Using Simpson's $\frac{1}{3}$ rd rule, estimate approximately in km the total distance run in 20 minutes. 15

उम्मीदवारों को
इस माशिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

उम्मीदवारों को
इस हार्जिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

4. (b) समीकरण निकाय:

$$4x + y + 2z = 4$$

$$3x + 5y + z = 7$$

$$x + y + 3z = 3$$

के हल के लिए गाउस सीडल पुनरावर्ती क्रिया-विधि निर्धारित कीजिए तथा आरंभिक सदिश $X^{(0)} = 0$ से प्रारंभ करके तीन बार पुनरावर्त कीजिए। यथातथ (बिल्कुल ठीक) हल भी निकालिए और पुनरावर्त हलों से तुलना कीजिए।

For the solution of the system of equations:

$$4x + y + 2z = 4$$

$$3x + 5y + z = 7$$

$$x + y + 3z = 3$$

Set up the Gauss-Seidel iterative scheme and iterate three times starting with the initial vector $X^{(0)} = 0$. Also find the exact solutions and compare with the iterated solutions. 15

~~3x~~ Given, $2z$ is diagonally dominant, so proceeding

$$4x + y + 2z = 4$$

$$3x + 5y + z = 7$$

$$x + y + 3z = 3$$

Setting up, Gauss-Seidel

$$x_n = \frac{4 - y_{n-1} - 2z_{n-1}}{4}$$

$$y_n = \frac{7 - 3x_n - z_n}{5}$$

$$z_n = \frac{3 - x_n - y_n}{3}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Now, 1st iteration

~~2~~

$$x_1 = 1, y_1 = \frac{4}{5}, z_1 = \frac{2}{5}$$

Now, applying 2nd iteration

$$x_2 = \frac{4 - y_1 - 2z_1}{4}$$

$$y_2 = \frac{7 - 2x_1 - 3z_1}{5}$$

$$z_2 = \frac{3 - x_1 - y_1}{2}$$

∴ $x_2 = 0.6, y_2 = 0.96, z_2 = 0.48$

Similarly in 3rd iteration

$$x_3 = 0.52, y_3 = 0.992, z_3 = 0.496$$

Now, to find exact solution,

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

∴ ~~By using~~

$$\begin{aligned} R_2 &\rightarrow R_2 - \frac{3R_1}{4} \\ R_3 &\rightarrow R_3 - \frac{R_1}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{12}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 3 \\ 4 & 1 & 2 & | & 4 \\ 3 & 5 & 1 & | & 7 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 3 \\ 0 & -3 & -10 & | & -8 \\ 0 & 2 & -8 & | & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 3 \\ 0 & 3 & 10 & | & 8 \\ 0 & 1 & -4 & | & -4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 3 \\ 0 & 1 & -4 & | & -4 \\ 0 & 3 & 10 & | & 8 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 3 \\ 0 & 1 & -4 & | & -4 \\ 0 & 0 & 22 & | & 20 \end{pmatrix}$$

Further solving

\therefore By solving
Comparison
Now Error =

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}, y = 1, z = \frac{1}{2}}$$

$$\Delta x = 0.02$$

$$\Delta y = 0.008$$

$$\Delta z = 0.004$$

4. (c)

न्यूटन-रेफसन विधि का उपयोग करते हुए अबीजीय (ट्रान्सिडेंटल) समीकरण $x \log_{10} x = 1.2$ का वास्तविक मूल दशमलव के तीन स्थानों तक सही गणना कीजिए।

Apply Newton-Raphson method, to find a real root of transcendental equation $x \log_{10} x = 1.2$, correct to three decimal places.

10

उम्मीदवारों को इस ह्रासिए में नही लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

$$f(x) = x \log_{10} x - 1.2$$

$$f'(x) = \log_{10} x + x \frac{d}{dx} (\log_{10} x) \Rightarrow$$

$$\text{Now } \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$\log_{10} x + \frac{1}{x \ln 10}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\log_{10} x) = \frac{1}{x \ln 10}$$

$$\therefore f'(x) = \log_{10} x + \frac{1}{x \ln 10} = \frac{\ln x + 1}{x \ln 10}$$

$$f(x) = \frac{x \ln x}{\ln 10} - 1.2$$

By Newton Raphson, formula

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

putting value

$$x_n = \frac{x_{n-1} \ln(x_{n-1})}{\ln 10} - \frac{x_{n-1} \ln(x_{n-1}) - 1.2 \ln 10}{\ln(x_{n-1}) + 1}$$

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1.2 \ln 10 - x_{n-1} \ln x_{n-1}}{\ln x_{n-1} + 1}$$

$$f(1) = -1.2 \quad f(2) = 0.6 \quad f(3) = 0.23 \text{ (closed)}$$

Assume

$$n = 3$$

$$x_1 = x_0 + \frac{1.2 \ln 10 - x_0 \ln x_0}{\ln x_0 + 1}$$

$x_0 = 3$	$x_1 = 2.746149$
$x_1 = 2.746149$	$x_2 = 2.74064$
$x_2 = 2.74064$	$x_3 = 2.740646$
$x_3 = 2.740646$	$x_4 = 2.740646$

Thus as in x_3 and x_4 last 3 decimal are same.

$$\therefore x = \underline{2.7406}$$

Correct above 3 decimal places

4. (d) (i) केवल NAND गेट्स का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित व्यंजक को समझाइए:

$$g = (\bar{a} + \bar{b} + c) \bar{d} (\bar{a} + e) f \text{ जहाँ } \bar{x}, x \text{ के पूरक को दर्शाता है।}$$

Realize the following expressions by using NAND gates only:

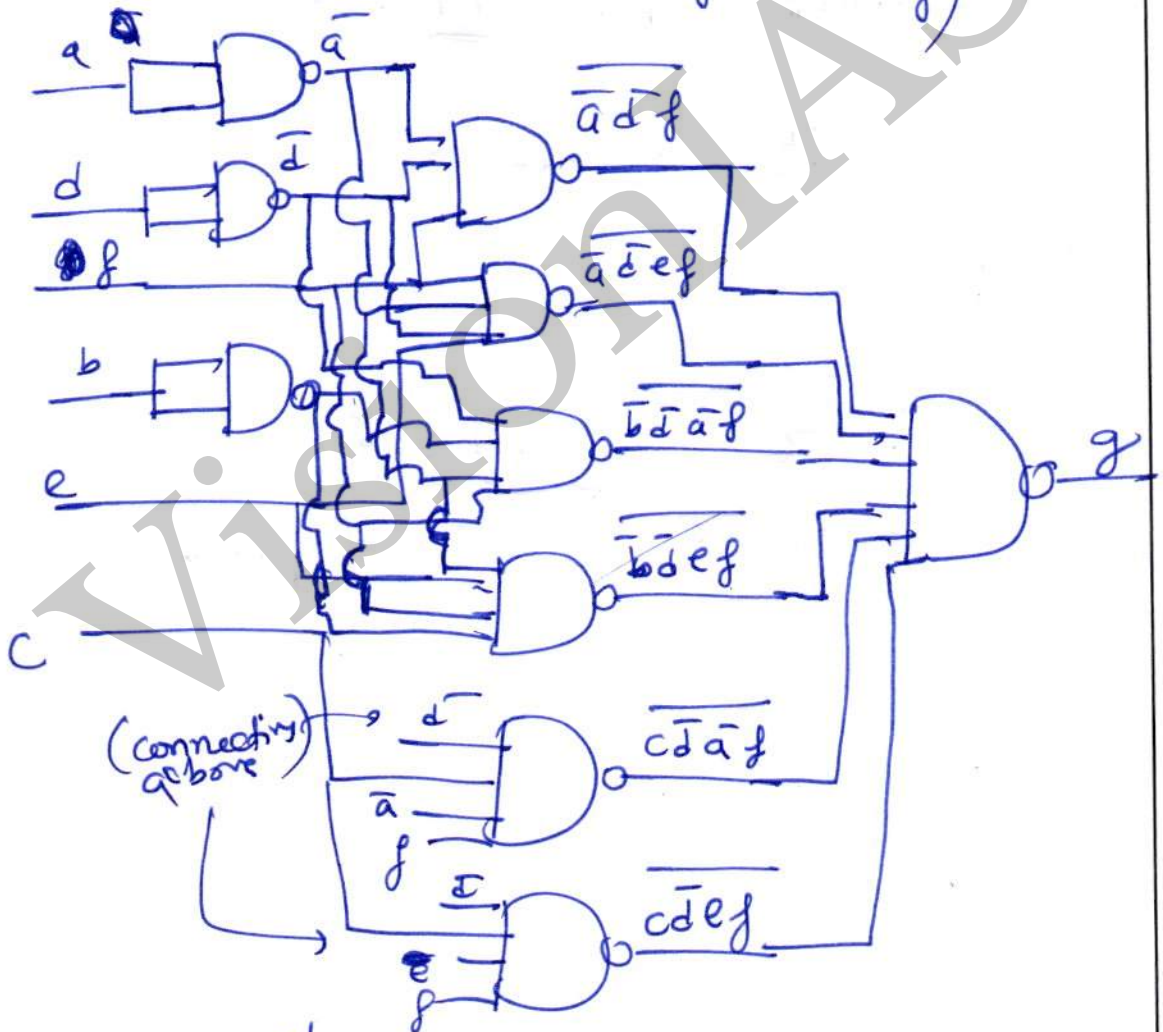
$$g = (\bar{a} + \bar{b} + c) \bar{d} (\bar{a} + e) f \text{ where } \bar{x} \text{ represents the complement of } x.$$

5

$$g = (\bar{a} + \bar{b} + c) (\bar{d}) (\bar{a} + e) f$$

$$= (\bar{a}\bar{d} + \bar{b}\bar{d} + c\bar{d}) (\bar{a}f + ef) \text{ (∵ (a+b)c = a\bar{c} + b\bar{c} + c \text{ सॉल्ट})}$$

$$= (\bar{a}\bar{d}f + \bar{a}\bar{d}ef + \bar{b}\bar{d}\bar{a}f + \bar{b}\bar{d}ef + c\bar{d}\bar{a}f + c\bar{d}ef)$$



Method used, convert to Sum of product and replace gates with NAND

(ii) $(357.32)_8$ का दशमलव तुल्य ज्ञात कीजिए।

Find the decimal equivalent of $(357.32)_8$

5

उम्मीदवारों को
इस स्थिति में
नहीं लिखना
चाहिए।
Candidates
must not
write on
this margin

$$x = (357.32)_8$$

To find decimal equivalent, we multiply by place value in 8 base system

$$3 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 7 \times 8^0 + 3 \times 8^{-1} + 2 \times 8^{-2}$$

$$= (239.40625)_{10}$$

5. (a)

दर्शाए कि सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय पर $f_1(z) = z, f_2(z) = 1 - z, f_3(z) = \frac{z}{(1-z)}, f_4(z) = \frac{1}{z}, f_5(z) = \frac{1}{(1-z)}, f_6(z) = \frac{(z-1)}{z}$ से परिभाषित छः रूपांतरणों का समुच्चय $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ प्रतिचित्रण-संयोजन के सापेक्ष 6 कोटि का एक अन्-आबेली ग्रुप (समूह) है।

Show that the set $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ of six transformations on the set of Complex numbers defined by $f_1(z) = z, f_2(z) = 1 - z, f_3(z) = \frac{z}{(1-z)}, f_4(z) = \frac{1}{z}, f_5(z) = \frac{1}{(1-z)}, f_6(z) = \frac{(z-1)}{z}$ is a non-abelian group of order 6 w.r.t. composition of mappings.

उम्मीदवारों को इस हार्शिय में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

10

To show group we will use Cayley table.

	$f_1(z)$	$f_2(z)$	$f_3(z)$	$f_4(z)$	$f_5(z)$	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_6	f_3	f_4	f_5
f_3	f_3	f_6	f_1	f_5	f_4	f_2
f_4	f_4	f_5	f_2	f_1	f_6	f_3
f_5	f_5	f_3	f_4	f_2	f_1	f_6
f_6	f_6	f_4	f_2	f_3	f_6	f_1

we are ~~summarizing~~

now,

$$f_1 \circ f_1(z) = f_1(z) = z = f_1$$

$$f_1 \circ f_2(z) = f_1(1-z) = 1-z = f_2$$

.....

Similarly $f_1 \circ f_n(z) = f_n$ for all n

Thus, f_1 is Identity (can be seen from Cayley table as row become same as top row)

Now, $f_2 f_1(z) = f_2(1-z) = \underline{f_2}$

$f_2(f_2(z)) = f_2(1-z) = 1 - (1-z) = z = f_1$

$f_2(f_3(z)) = f_2\left(\frac{z}{z-1}\right) = 1 - \frac{z}{z-1} = \frac{-1}{z-1}$

$f_2(f_4(z)) = f_2\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} = f_6$

$f_2(f_5(z)) = f_2\left(\frac{1}{1-z}\right) = 1 - \frac{1}{1-z} = \frac{z}{z-1} = f_3$

$f_2(f_6(z)) = f_2\left(\frac{z-1}{z}\right) = 1 - \left(\frac{z-1}{z}\right) = \frac{1}{z} = f_4$

Similarly, filling the table for

f_3	f_4	f_5	f_6
$f_3 f_2(z)$ $= f_3(1-z)$ $= \frac{1-z}{-z}$ $= \frac{z-1}{z} = f_6$			
$f_3 f_4 = f_3\left(\frac{1}{z}\right)$ $= \frac{1}{\frac{1}{z}} = \frac{z}{1} = f_5$			
$f_3(f_5) = f_3\left(\frac{1}{1-z}\right)$ $= f_4$			

Now, using table, as it has all element defined \Rightarrow closure exist

Associativity exist (function property)

Identity = f_1 , Inverse exist as all column has identity element, As it is symmetric

is aabelian

5. (b)

यदि $f(z)$, C में D पर विश्लेषिक फलन है और समीकरण $Im f(z) = (Re f(z))^2$ को संतुष्ट करता है। दर्शाइए कि $f(z)$, D में स्थिरांक है।

If $f(z)$ is analytic function on D in C and satisfies the equation $Im f(z) = (Re f(z))^2$. Show that $f(z)$ is constant in D .

10

उम्मीदवारों को इस भाग में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

$$z = f(x) + i g(y)$$

given

$$g(y) = (f(x))^2 \quad \text{--- (1)}$$

Now, as $f(z)$ is analytic, it satisfy Cauchy - Riemann Equation

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{and} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

Using 1,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2f \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2f \frac{\partial f}{\partial y}$$

Using

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2f \cdot (2f) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

putting in equation (2)

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 4f^2 \left(-\frac{\partial g}{\partial x} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} (1 + 4f^2) = 0$$

Now $1 + 4f^2 \neq 0$

$$\therefore \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \Rightarrow g = h(y)$$

$$\therefore \text{By 2, } \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \Rightarrow h = p(x)$$

~~$\frac{\partial g}{\partial y} = h'(y)$~~ Also by 1,

$$h(y) = (p(x))^2$$

but LHS is function of y
and RHS is function of x constant
- Both equal only when equal to 0

$$\therefore h(y) = 0 \quad p(x) = \sqrt{c} \quad c \text{ is some constant}$$

$$\therefore f(z) = \sqrt{c} + i.c$$

~~\Rightarrow~~ constant

hence proved

5. (c)

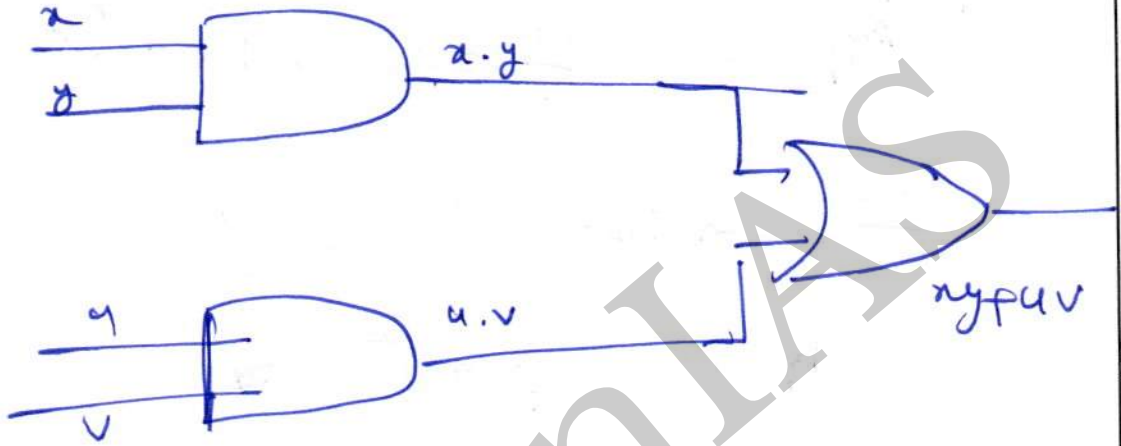
केवल AND तथा OR तर्कसंगत द्वार (लॉजिक गेट्स) का प्रयोग करते हुए बूलीय व्यंजक $z = xy + uv$ के लिए एक तर्क परिपथ की रचना कीजिए।

Use only AND and OR logic gates to construct a logic circuit for the Boolean expression $z = xy + uv$

10

उम्मीदवारों को इस हार्शिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

$$z = x.y + u.v$$



and gate



or gate

उम्मीदवारों को
इस कक्ष में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

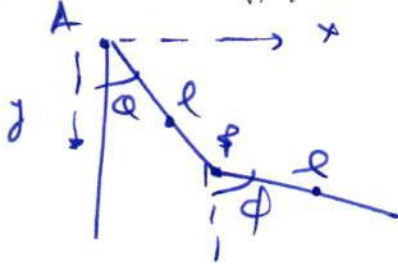
VisionIAS

5. (d)

प्रत्येक l लम्बाई की दो समान छड़ें AB तथा BC, B पर मसृणीकृत (सुचारु रूप से) संयोजित तथा A से निलंबित (लटकी हुई) हैं और A से गुजरते ऊर्ध्वाधर समतल में दोलन कर रही हैं। दर्शाइए कि प्रसामान्य दोलन काल $\frac{2\pi}{n}$ है। जहाँ, $n^2 = (3 \pm \frac{6}{\sqrt{7}}) \frac{g}{l}$

Two equal rod AB and BC, each of length l , smoothly jointed at B, are suspended from A and oscillate in a vertical plane through A. Show that that the periods of normal oscillation are $\frac{2\pi}{n}$. Where, $n^2 = (3 \pm \frac{6}{\sqrt{7}}) \frac{g}{l}$

10



for rod 1

$$x_{cm} = l \sin \theta, \quad y_{cm} = l \cos \theta$$

for rod 2

$$x_{cm} = l \sin \theta + \frac{l}{2} \sin \phi$$

$$y_{cm} = l \cos \theta + \frac{l}{2} \cos \phi$$

Now,

T is kinetic energy of system

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} \times \frac{m l^2}{12} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} \times \frac{m l^2}{12} \dot{\phi}^2$$

$$\dot{x}_1 = + \frac{l}{2} \cos \theta \dot{\theta}, \quad \dot{y}_1 = - \frac{l}{2} \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{x}_2 = l \cos \theta \dot{\theta} + \frac{l}{2} \cos \phi \dot{\phi}, \quad \dot{y}_2 = -l \sin \theta \dot{\theta} - \frac{l}{2} \sin \phi \dot{\phi}$$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{l^2}{4} \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} \times \frac{m l^2}{12} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{m l^2}{12} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m \left(l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{l^2}{4} \dot{\phi}^2 + 2 l^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi + 2 l^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \right)$$

~~Now~~

$$V = -mg \frac{l}{2} \cos \theta - mg \left(l \cos \theta + \frac{l}{2} \cos \phi \right)$$

उम्मीदवारों को
इस क्राशिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

5. (e)

लाग्रांज के माध्य मान प्रमेय का प्रयोग करते हुए दर्शाइए कि $|\cos b - \cos a| \leq |b - a|$.Using Lagrange's Mean value theorem, show that $|\cos b - \cos a| \leq |b - a|$.

10

उम्मीदवारों को इस कक्ष में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

(LMVT)

Lagrange's mean value theorem; If function is continuous in $[a, b]$ and differentiable in (a, b) then $\exists c$ such that

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Assume $f(x) = \cos x$ in interval $[a, b]$ as, it is continuous (\because on all x) and differentiable in interval

$$f'(x) = -\sin x$$

\therefore Applying LMVT,

$$-\sin c = \frac{\cos b - \cos a}{b - a}$$

Taking modulus

$$|-\sin c| = \left| \frac{\cos b - \cos a}{b - a} \right|$$

Now

$$\text{as } |\sin c| < 1$$

$$\therefore \left| \frac{\cos b - \cos a}{b - a} \right| \leq 1$$

$$\therefore |\cos b - \cos a| \leq |b - a|$$

Hence proved

VisionIAS

6. (a) कौशी समाकल सूत्र का प्रयोग करके $\int_c \frac{e^{3z}}{(z+1)^4} dz$ का मूल्यांकन कीजिए, जहां c वृत्त $|z| = 2$ है।

Use Cauchy integral formula to evaluate $\int_c \frac{e^{3z}}{(z+1)^4} dz$ where c is the circle $|z| = 2$.

15

उम्मीदवारों को
इस हिसाब में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

उम्मीदवारों को
इस ह्राशिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

VisionIAS

6. (b)

प्रारंभिक-परिसीमा मान समस्या का हल ज्ञात कीजिए।

$$u_t - u_{xx} + u = 0, 0 < x < l, t > 0$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, t \geq 0$$

$$u(x, 0) = x(l-x), 0 \leq x \leq l$$

Find the solution of the initial-boundary value problem

$$u_t - u_{xx} + u = 0, 0 < x < l, t > 0$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, t \geq 0$$

$$u(x, 0) = x(l-x), 0 \leq x \leq l$$

17

उम्मीदवारों को
इस हार्जिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

उम्मीदवारों को
इस हार्शिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

उम्मीदवारों को
इस हिसाब में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

6. (c)

वोगेल की सन्निकटन विधि का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित परिवहन समस्या का आरंभिक आधारी सुसंगत हल ज्ञात कीजिए। इस हल का उपयोग कर लागत ज्ञात कीजिए: (O – उद्गम, D – गंतव्य)

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	आपूर्ति
O ₁	6	4	1	5	14
O ₂	8	9	2	7	16
O ₃	4	3	6	2	5
मांग	6	10	15	4	

Find the initial basic feasible solution of the following transportation problem using Vogel's approximation method and find the cost. (O – Origins, D – Destinations)

	<u>D₁</u>	<u>D₂</u>	<u>D₃</u>	<u>D₄</u>	<u>Supply</u>
<u>O₁</u>	6	4	1	5	14
<u>O₂</u>	8	9	2	7	16
<u>O₃</u>	4	3	6	2	5
<u>Demand</u>	6	10	15	4	

उम्मीदवारों को
इस हलिका मे
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

18

उम्मीदवारों को
इस हार्शिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

उम्मीदवारों को
इस हाशिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

उम्मीदवारों को
इस क्राशिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

7. (a)

यदि (x, y, z) बिन्दु पर असंपीड्य तरल का वेग $\left(\frac{3xz}{r^5}, \frac{3yz}{r^5}, \frac{3z^2-r^2}{r^5}\right)$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, के द्वारा दिया गया है, तब सिद्ध कीजिए कि द्रव गति संभव है तथा वेग विभव z/r^3 है। इसके साथ ही, धारा-रेखाओं का भी निर्धारण कीजिए।

If the velocity of an incompressible fluid at the point (x, y, z) is given by $\left(\frac{3xz}{r^5}, \frac{3yz}{r^5}, \frac{3z^2-r^2}{r^5}\right)$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, then prove that the liquid motion is possible and that the velocity potential is z/r^3 . Further, determine the streamlines. 15

Let velocity (\vec{v}) be given by (u, v, w)

$$u = \frac{3xz}{r^5}, \quad v = \frac{3yz}{r^5}, \quad w = \frac{3z^2-r^2}{r^5}$$

Now, as fluid is incompressible, by continuity equation

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\text{Now } \rho \text{ constant } \Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

To check valid fluid motion, it must satisfy, continuity equation.

$$\therefore \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3xz}{r^5} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{3yz}{r^5} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{3z^2-r^2}{r^5} \right) = 0$$

$$\Rightarrow (3z)(r^5) - (3xz) \cdot 5r^4 \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)$$

$$+ (3z)(r^5) - 3yz \cdot 5r^4 \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)$$

$$+ (6z - 2r) \frac{\partial r}{\partial z} \cdot \frac{1}{r^5} - (3z^2-r^2) \cdot \frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right) = 0$$

2) Now $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x \quad \therefore \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

Similarly $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$

Putting in equation 1,

$$(3z)(r^5) - (3xz)(r^4) \left(\frac{x}{r}\right) + (3z)(r^5) - (3yz)(r^4) \left(\frac{y}{r}\right) + \left(6z - 2x \left(\frac{z}{x}\right)\right) r^5 - r(3z^2 - r^2) \left(\frac{x}{r}\right) \left(\frac{z}{r}\right)$$

$$10zr^5 - 3x^2zr^3 - 3y^2zr^3 - 3z^3r^3 + 5zr^5$$

$$\Rightarrow 15zr^5 - 15r^3(x^2 + y^2 + z^2)z$$

Now $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

$$\Rightarrow 15zr^5 - 15zr^5 = 0$$

\therefore As it satisfy continuity equation, it is possible.

Now, let ϕ be velocity potential,

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{3xz}{r^5}, \quad -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{3yz}{r^5}, \quad -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{3z^2 - r^2}{r^5}$$

Now,

$$\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$$

$$-\oint \frac{3xz dx + 3yz dy + (3z^2 - y^2) dz}{r^5}$$

$$\Rightarrow \frac{3z}{2} \left(\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right) - \frac{dz}{r^3}$$

$$\Rightarrow \frac{3z dr}{r^4} - \frac{dz}{r^3} \quad \left(\begin{array}{l} \because \frac{d}{d}(x^2 + y^2 + z^2) = d(x^2 + y^2 + z^2) \\ \therefore \text{putting } r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{array} \right)$$

$$-d\phi \Rightarrow d\left(\frac{z}{r^3}\right)$$

$$\therefore \boxed{\phi = \frac{z}{r^3}} \quad \text{velocity potential}$$

Streamlines, we know that

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \Rightarrow \frac{dx}{3xz} = \frac{dy}{3yz} = \frac{dz}{3z^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{3xz} = \frac{dz}{3z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$$

$$\Rightarrow \ln x = \ln z + c_1$$

$$\therefore x = z c_1 \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{dy}{3yz} = \frac{dz}{3z^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$\Rightarrow (2z^2 - y^2 (c_1^2 + 1)) dy - 3yz dz = 0$$

$$M dy + N dz = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = 4z \quad \frac{\partial N}{\partial y} = -3z$$

$$\therefore ZP \Rightarrow y = \frac{z}{3} \quad \left(\text{As } \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial y} \right)$$

7. (b)

लौरां (लॉरेंट) श्रेणी ज्ञात कीजिए जो फलन $\frac{1}{(1+z^2)(z+2)}$ को दर्शाती है जब

- (i) $|z| < 1$
- (ii) $1 < |z| < 3$
- (iii) $|z| > 2$

Find the Laurent series which represents the function $\frac{1}{(1+z^2)(z+2)}$ when

- (i) $|z| < 1$
- (ii) $1 < |z| < 3$
- (iii) $|z| > 2$

उम्मीदवारों को इस भाग में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

15

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)(z+2)}$$

$$\frac{1}{(1+z^2)(z+2)} = \frac{a}{z+2} + \frac{cz+d}{1+z^2}$$

$$1 = a(1+z^2) + (cz+d)(z+2)$$

$$1 = (a+c)z^2 + (2c+d)z + a+2d$$

$$\begin{aligned} a+c &= 0 & 2c+d &= 0 & a+2d &= 1 \\ c &= -\frac{1}{5} \quad a = \frac{1}{5} & d &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(1+z^2)(z+2)} = \frac{1}{5(z+2)} - \frac{1}{5} \frac{z}{1+z^2} + \frac{2}{5(1+z^2)}$$

Now, (i) $|z| < 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{5 \cdot 2 \left(1 + \frac{z}{2}\right)} - \frac{1}{5} \frac{z}{1+z^2} + \frac{2}{5(1+z^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} \left(1 + \frac{z}{2}\right)^{-1} - \frac{z}{5} (1+z^2)^{-1} + \frac{2}{5} (1+z^2)^{-1}$$

Now

$$\Rightarrow \frac{1}{10} \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \dots \right) - \frac{(z\bar{z})}{5} \left(1 - z + z^2 + \dots \right)$$

($\because |z| < 1$ $|z^2| < 1$
as $|z| < 1$)

$$\Rightarrow \frac{1}{10} - \frac{z}{20} + \frac{z^2}{40} - \frac{z}{5} + \frac{z}{5} + z^2 \frac{(z\bar{z})}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}z \right) + z^2 \left(\frac{3}{8} \right) + \dots$$

By uniqueness theorem, this is Laurent series expansion in $|z| < 1$



here.

$$f(z) = \frac{1}{5(z+2)} + \frac{(z-2)}{5(1+z^2)} \quad \left(\because \left| \frac{z}{2} \right| < 1, \left| \frac{1}{z} \right| < 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5z \left(1 + \frac{z}{2} \right)} + \frac{z-2}{5z^2 \left(1 + \frac{1}{z^2} \right)}$$

$$= \frac{1}{5z} \left(1 + \frac{z}{2} \right)^{-1} + \frac{z-2}{5z^2} \left(1 + \frac{1}{z^2} \right)^{-1}$$

($\because \left| \frac{z}{2} \right| < 1$ & $\left| \frac{1}{z^2} \right| < 1$)

$$= \frac{1}{5z} \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \dots \right) + \frac{z-2}{5z^2} \left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5z} - \frac{2}{5z^2} + \frac{4}{5z^3} + \frac{2}{5z^2} - \frac{1}{5z}$$

$$+ \frac{8}{5z^4} + \frac{(2-2)}{5z^2} \left(-\frac{1}{z^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5z^3} + \frac{-2}{5z^4} + \frac{1}{5z^3} + \frac{1}{z^4}$$

$$= \frac{1}{z^3} + \frac{6}{5z^4} + 0 \left(\frac{1}{z^5} \right) + \dots$$

Now,

$$\left(\frac{1}{z} \right) \left(\frac{1}{1+z} \right) \left(\frac{2-2}{z} \right) \quad \left(\frac{1}{z^3} \right) \left(\frac{2}{z} \right) \left(\frac{2}{z} \right)$$

↳ we have done is $|z| > 2$

~~$$\frac{1}{5z} \left(1 + \frac{2}{z} \right) + \frac{2-2}{5z^2} \left(1 + \frac{1}{z} \right)$$~~

$$\frac{1}{5z} \left(1 + \frac{2}{z} \right) + \frac{2-2}{5z^2} \left(1 + \frac{1}{z} \right)$$

$$= \frac{1}{10} \left(1 + \frac{2}{z} \right)^{-1} + \frac{2-2}{5z^2} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{10} \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{2^2}{40} + \frac{2}{5z^2} - \frac{1}{5z} - \frac{2}{5z^4} + \frac{1}{5z^3} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{10} - \frac{2}{4} + z^2 \left(\frac{17}{40} \right) + 0 \left(z^3 \right) \right)$$

These from uniqueness, this is Laurent series expansion

7. (c)

नीचे दिए गए द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलन समीकरण को विहित रूप में समानीत (बदलें) कीजिए और सामान्य हल ज्ञात कीजिए:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} + 12x$$

Reduce the following second order partial differential equation to canonical form and find the general solution:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} + 12x$$

20

$$R \rightarrow -2xs + x^2t = \eta + 12x$$

$$s = 1 - 2x - 2s$$

VisionIAS

उम्मीदवारों को इस हार्फ में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

उम्मीदवारों को
इस हार्शिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

उम्मीदवाले को
इस माथिए में
नही लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

उम्मीदवारों को
इस कक्ष में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

8. (a)

निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को एकधा विधि द्वारा हल कीजिए। इसकी द्वैती समस्या लिखिए। साथ ही, दी गई समस्या की इष्टतम सारणी से द्वैती समस्या का इष्टतम हल भी लिखिए:

$$\text{अधिकतमीकरण कीजिए } z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3$$

बशर्ते कि,

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Solve the following linear programming problem by the simplex method. Write its dual. Also, write the optimal solution of the dual from the optimal table of the given problem:

$$\text{Maximize } z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3$$

Subjected to

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

उम्मीदवारों को इस हार्जिन में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

18

उम्मीदवारों को
इस हार्जिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

उम्मीदवारों को
इस क्राशिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

उम्मीदवारों को
इस हफ्तिा में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

8. (b)

यदि फलन $f(z)$, $|z - a| < R$ में विश्लेषिक और एक मान वाला है, तब सिद्ध कीजिए कि $0 < r < R$ के लिए $f'(a) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} P(\theta) e^{-i\theta} d\theta$, जहां $P(\theta) f(a + re^{i\theta})$ का वास्तविक भाग है।

If the function $f(z)$ is analytic and one valued in $|z - a| < R$, prove that for $0 < r < R$,

$f'(a) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} P(\theta) e^{-i\theta} d\theta$, where $P(\theta)$ is the real part of $f(a + re^{i\theta})$.

16

उम्मीदवारों को
इस हार्जिन में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

उम्मीदवारों को
इस हार्जिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

उम्मीदवारों को
इस हार्शिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

8. (c) दर्शाइए कि एक दीर्घवृत्ताकार क्षेत्रफल, जिसका द्रव्यमान M है तथा अर्धक्ष a व b हैं, का अर्ध-व्यास, जिसकी लम्बाई r है, के इर्द-गिर्द जड़त्व आघूर्ण $\frac{1}{4} M \frac{a^2 b^2}{r^2}$ होगा। आगे सिद्ध कीजिए कि स्पर्शरखा के इर्द-गिर्द जड़त्व आघूर्ण $\frac{5M}{4} p^2$ होगा, जहां p दीर्घवृत्त के केन्द्र से स्पर्शरखा की लम्बवत् दूरी है।

Show that the moment of inertia of an elliptic area of mass M and semi-axis a and b about a semi-diameter of length r is $\frac{1}{4} M \frac{a^2 b^2}{r^2}$. Further, prove that the moment of inertia about a tangent is $\frac{5M}{4} p^2$ where p is the perpendicular distance from the centre of the ellipse to the tangent. 16

उम्मीदवारों को इस हिसाब से नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

VisionIAS

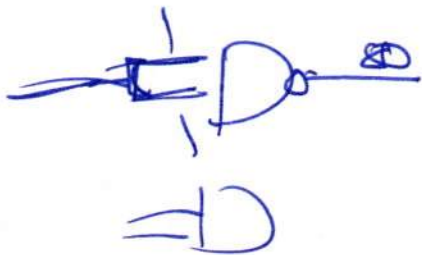
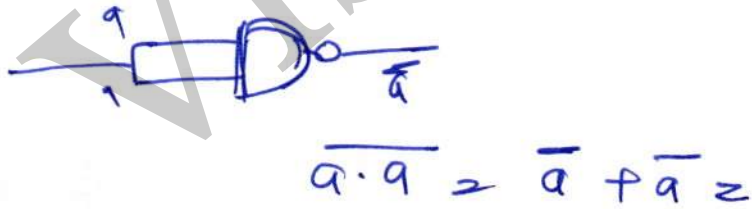
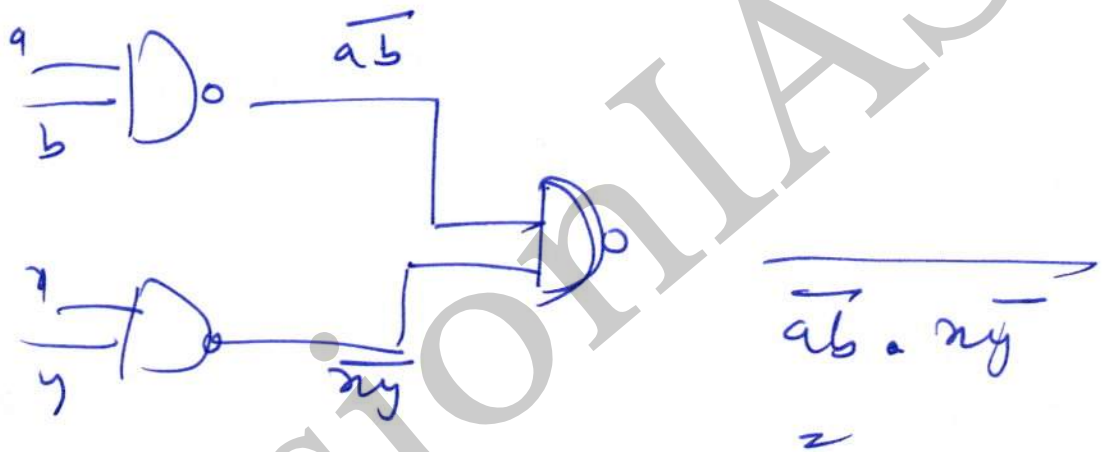
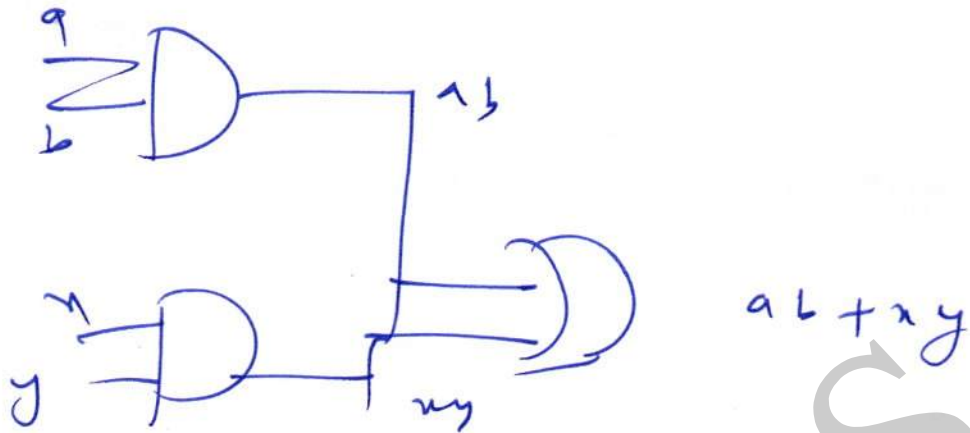
उम्मीदवारों को
इस हार्जिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

उम्मीदवारों को
इस हार्जिए में
नहीं लिखना
चाहिए
Candidates
must not
write on
this margin

VisionIAS

SPACE FOR ROUGH WORK



SPACE FOR ROUGH WORK

VisionIAS

SPACE FOR ROUGH WORK

$$y_p = \frac{1}{9}(y-x)^3$$

$$2 \left[\frac{1 \times 3 \times 2 (y-x)^2 (y-x) (-1) (-1)}{3} \right]$$

$$- 5 \times \frac{1}{9} ((y-x)^3 (-1))$$

$$+ (2) \frac{1}{9} \times 3 \times 2$$

$$\frac{16}{3} - \frac{20}{9} \times 6x - 1$$

$$\frac{16}{3} + \frac{20}{9} \times 6x + 2 + \frac{34}{9} \times 4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^4 x^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

convergent

$$\text{let } \frac{1}{n^2} \geq 1$$

$\frac{d}{dx}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n^2+1)}$$

convergent
Leibniz

monotonically decreasing

$$(-1)^n b_n \rightarrow 0$$

finite

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converges

ϵ