VISIONIAS
INSPIRING INNOVATION
ABHYAAS MAINS

गणित (प्रश्न-पत्र I)
Mathematics (Paper-I)

निर्धारित समय: **तीन घंटे** *Time Allowed: **Three Hours***	**(Test Code : 3124)**	अधिकतम अंक: **250** *Maximum Marks: **250***

सामान्य अनुदेश

इस प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका में 88+8 पृष्ठ हैं। प्रश्न-पत्र, क्यू.सी.ए. पुस्तिका के अंत में संलग्न है, जो अलग (वियोज्य) किया जा सकता है और उम्मीदवार परीक्षा के उपरांत अपने साथ ले जा सकते हैं।

रफ कार्य के लिए, इस पुस्तिका के अंत में खाली पृष्ठ दिया गया है।

पुस्तिका प्राप्त होने पर, कृपया यह जांच कर लें कि इस क्यू.सी.ए. पुस्तिका में कोई कमी न हो, फटा हुआ पृष्ठ न हो अथवा कोई पृष्ठ गायब न हो इत्यादि। यदि ऐसा हो, तो इसके बदले नई क्यू.सी.ए. पुस्तिका प्राप्त कर लें।

General Instructions

This Question-Cum-Answer (QCA) Booklet contains 88+8 pages. Question Paper in detachable form is available at the end of the QCA Booklet which can be taken away by the candidate after examination.

For rough work, blank page has been provided at the end of this Booklet.

On receipt of the Booklet, please check that this QCA Booklet does not have any shortcomings, torn or missing pages etc. If, so, get it replaced with a fresh QCA Booklet.

(उम्मीदवार द्वारा भरा जाएगा/To be filled by the Candidate)

पंजीकरण सं./Registration No. : 01142925

अभ्यर्थी का नाम/Name of Student : Aakash Trivedi

माध्यम: हिंदी/अंग्रेजी
Medium: Hindi/English
English

गणित (प्रश्न-पत्र I)
Mathematics (Paper-I)

तारीख
Date
1/09/24

केंद्र
Centre
JVSD

Anchal
01/09/24
निरीक्षक के हस्ताक्षर
Invigilator's Signature

	महत्वपूर्ण अनुदेश **उम्मीदवारों को नीचे उल्लिखित निर्देश सावधानी से पढ़ लेने चाहिए। किसी भी निर्देश का उल्लंघन करने पर उम्मीदवारों को मिलने वाले अंकों में कटौती, उम्मीदवारी रद्द या आयोग के परवर्ती परीक्षाओं के लिए वर्जित करने इत्यादि के रूप में दण्डित किया जा सकता है।**	**Important Instructions** **Candidates should read the undermentioned instructions carefully. Violation of any of the following instructions may entail penalty in the form of deduction of marks, cancellation of candidature, debarment from further Examination of the Commission etc.**
1	(क) अपना पंजीकरण सं. एवं अन्य विवरण केवल प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका (क्यू.सी.ए.) में उम्मीदवार के लिए निर्धारित स्थान पर ही लिखें। (ख) इस पुस्तिका में अन्यत्र कहीं भी अपना नाम, पंजीकरण सं., मोबाइल नं., पता अथवा प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका (क्यू.सी.ए.) संख्या न लिखें जिससे आपकी पहचान का खुलासा हो।	(a) Write your Registration Number and other details only in the space provided in the Question-Cum-Answer (QCA) Booklet for candidates. (b) Do not disclose your identity in any manner such as, by writing your Name, Registration number, Mobile number, Address, Question-Cum-Answer (QCA) Booklet No. etc. elsewhere in the Booklet
2	अपनी प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में कहीं भी प्रश्नों के वास्तविक उत्तर के अतिरिक्त कुछ न लिखें जैसे कि कोई कविता/दोहा, अभद्र या अपमानजनक अभिव्यक्ति इत्यादि और न ही कोई ऐसा चिन्ह/निशान बनाएं जिसका उत्तर से सम्बन्ध न हो।	Do not write in the QCA Booklet anything other than the actual answer such as couplet, obscene, abusive expression etc., nor put any sign/mark having no relevance to the answer.
3	परीक्षक को प्रत्यक्ष/अप्रत्यक्ष रूप से कोई भी प्रार्थना/ धमकी भरी बातें न लिखें।	Do not make any direct/indirect appeal/threat to the examiner.
4	उत्तर अस्पष्ट अथवा गंदी लिखावट में न लिखें। इस प्रकार के उत्तर का मूल्यांकन नहीं भी किया जा सकता है।	Do not write answers in bad/illegible handwriting. Such answers may not be evaluated.
5	उत्तर स्याही में ही लिखें। उत्तर लिखने के लिए पेंसिल का उपयोग न करें, हालांकि आरेख, चित्र इत्यादि बनाने के लिए पेंसिल का उपयोग किया जा सकता है।	Write answers in ink only. Do not use pencil for writing the answers. However, pencil may be used for drawing diagrams, sketches, etc.
6	प्रवेश पत्र में उल्लेख किए गए माध्यम के अलावा अन्य किसी माध्यम में उत्तर न लिखें। अधिकृत और अनधिकृत की मिली जुली भाषा का भी उपयोग न करें।	Do not write answers in medium other than the authorized medium in the Admission Certificate. Do not use mixed language either i.e. authorize and unauthorized media together for writing answers.
7	प्रश्नों के उत्तर ठीक उसके नीचे दिए गए निर्धारित स्थान पर ही लिखें। निर्धारित स्थान के अलावा किसी अन्य स्थान पर लिखे गए उत्तर का मूल्यांकन नहीं किया जाएगा।	Write answer at the specific space (right below the question) only. Answers written elsewhere at unspecified places in the booklet shall not be evaluated.
8	यदि आप अपने किसी उत्तर को रद्द करना चाहते हैं तो उसे पेन से काट दें तथा उस पर "रद्द" लिख दें, अन्यथा उसका मूल्यांकन किया जा सकता है।	If you wish to cancel any work, draw your pen through it and write "Cancelled" across it, otherwise it may be valued.

कार्यालय के प्रयोग हेतु For Official Use	कार्यालय के प्रयोग हेतु For Official Use
परीक्षक के हस्ताक्षर Signature of Examiner(s)	

प्राप्तांक के विवरण (परीक्षक द्वारा भरा जाए)/ Marks Details (To be filled by the Examiner(s))

प्रश्न सं. Q. No.	a	b	c	d	e	अंक Marks	
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
सकल योग (A+B) / GRAND TOTAL							

VISIONIAS
INSPIRING INNOVATION

ABHYAAS MAINS

गणित (प्रश्न-पत्र I)

Mathematics (Paper I)

निर्धारित समय: **तीन** घंटे Time Allowed: **Three** Hours	**(Test Code : 3124)**	अधिकतम अंक: **250** Maximum Marks: **250**

प्रश्न-पत्र संबंधी विशेष अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें:

इसमें **आठ** प्रश्न हैं तथा **हिंदी** और **अंग्रेज़ी** में छपे हुए हैं।

प्रश्न संख्या 1 और 5 अनिवार्य हैं तथा बाकी में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के लिए नियत अंक उसके सामने सूचित हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

प्रश्नों में शब्द-सीमा, जहाँ विनिर्दिष्ट है, का अनुसरण किया जाना चाहिए।

जहां आवश्यक हो, अपने उत्तरों को उपयुक्त चित्रों/मानचित्रों तथा आरेखों द्वारा दर्शाइए। इन्हें प्रश्न का उत्तर देने के लिए दिए गए स्थान में ही बनना है।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। आंशिक रूप से दिए गए प्रश्नों के उत्तर को भी मान्यता दी जाएगी यदि उसे काटा न गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़े गए कोई पृष्ठ अथवा पृष्ठ के भाग को पूर्णतः काट दीजिए।

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

There are **EIGHT** questions and printed in **HINDI & ENGLISH.**

Questions no 1 and 5 are compulsory and out of the remaining, any THREE are to be attempted.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Word limit in questions, wherever specified, should be adhered to.

Illustrate your answers with suitable sketches/maps and diagrams, wherever considered necessary. These shall be drawn in the space provided for answering the question itself.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

EVALUATION INDICATORS

1. **Contextual Competence**
2. **Content Competence**
3. **Language Competence**
4. **Introduction Competence**
5. **Structure - Presentation Competence**
6. **Conclusion Competence**

Overall Macro Comments / feedback / suggestions on Answer Booklet:

1.

2.

3.

4.

5.

6.

All the Best

1. (a) यदि

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -4 & 1\\ 3 & 0 & -3\end{bmatrix} \text{ और } B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

तो दर्शाइए कि $AB = 6I_3$ है। इस परिणाम का उपयोग करते हुए निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$2x + y + z = 5$

$x - y = 0$

$2x + y - z = 1$

If

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -4 & 1\\ 3 & 0 & -3\end{bmatrix} \text{ and } B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

then show that $AB = 6I_3$. Use this result to solve the following system of equations:

$2x + y + z = 5$

$x - y = 0$

$2x + y - z = 1$ 10

Given,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -4 & 1\\ 3 & 0 & -3\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix} \quad \text{--- (1)}$$

$\therefore$

$$AB=\begin{bmatrix}1.2+2.1+1.2 & 1.1+2(-1)+1.1 & 1.1+2.0+1.(-1)\\ 1.2+\overset{(-4)}{\cancel{a}}(+1)+1.2 & 1.1+(-4)(-1)+(1)(1) & 1.1+(-4)(0)+1(-1)\\ 3.2+0.1+(-3).2 & 3.1+0(-1)+\cancel{A}(-3)(1) & 3(1)+0+(-3)(-1)\end{bmatrix}$$

$(\because$ Using multiplication of matrix$)$

$$=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

$$=6I \quad \left(\because I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

Thus, $\boxed{AB = 6I_3}$ proved.

Now,

$2x + y + z = 5$

$x - y = 0$

$2x + y - z = 1$

Converting in ~~AX~~ $Ax = B$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Using 1,

$BX = C$ where $X^T = [x \ y \ z]$
$C^T = [5 \ 0 \ 1]$

Now premultiply by A,

$ABX = AC$

$\Rightarrow 6I_3 X = AC$

$\Rightarrow 6X = AC$

$$\Rightarrow X = \frac{AC}{6} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ is } \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore \boxed{x = 1, y = 1, z = 2}$ is solution of equation

1. (b) दर्शाइए कि $\nabla^2\left[\nabla.\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right)\right] = \frac{2}{r^4}$, जहां $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ है।

Show that $\nabla^2\left[\nabla.\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right)\right] = \frac{2}{r^4}$, where $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. 10

Given,

$$\nabla^2\left[\nabla.\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right)\right]$$

$$= \nabla^2\left[\nabla\left(\frac{1}{r^2}\right).\vec{r} + (\nabla.\vec{r})\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]$$

$$\left(\because \nabla.(\phi\vec{A}) = (\nabla\phi).\vec{A} + \phi(\vec{\nabla}.\vec{A})\right)$$

$$\Rightarrow \nabla^2\left[\left(\frac{-2}{r^3}\frac{\vec{r}}{r}\right).\vec{r} + 3\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]$$

$$\left(\because \vec{\nabla}.\vec{r} = 3 \text{ as } \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3\right.$$

$$\left.\text{and } \nabla(f(r)) = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla^2\left[\frac{-2r^2}{r^4} + \frac{3}{r^2}\right] \quad (\because \vec{r}.\vec{r} = r^2)$$

$$= \nabla^2\left[\frac{1}{r^2}\right]$$

$$= \nabla.\left(\nabla\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{(using Definition)}$$

$$\Rightarrow \nabla.\left(\frac{-2}{r^3}\frac{\vec{r}}{r}\right) \quad \left(\text{using } \nabla f(r) = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \left(\frac{-2\vec{r}}{r^4} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{r^4} \times 3 + \vec{r} \cdot \left(\frac{(-2)(-4)}{r^5} \right) \frac{\vec{r}}{r}$$

(using $\nabla \cdot (\phi A) = \nabla \phi \cdot \vec{A} + \phi (\nabla \cdot \vec{A})$ and $\nabla f(r) = f'(r)\,\hat{r}$)

$$\Rightarrow -\frac{6}{r^4} + \frac{8}{r^4}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{r^4}$$

$$\therefore \boxed{\nabla^2 \left[\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) \right] = \frac{2}{r^4}}$$

1. (c) अवकल समीकरण का पूर्ण हल ज्ञात कीजिए:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 3x^2 \sin 2x$$

Determine the complete solution of the differential equation:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 3x^2 \sin 2x$$ 10

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 3x^2 \sin 2x$$

$$(D^2 - 4D + 4)y = 3x^2 \sin 2x$$

Write Auxiliary equation,

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$m = 2, 2$$

$$\therefore y_c = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

Now, to find particular integral,

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 4D + 4}(3x^2 \sin 2x)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Img}\left(\frac{1}{D^2-4D+4}(3x^2 e^{i2x})\right)$$

$$(\because \text{using } \operatorname{Img}(e^{i2x}) = \sin 2x)$$

$$\Rightarrow \text{Img}\left(e^{ix}\frac{1}{(D+2i)^2-4(D+2i)+4}(3x^2)\right)$$

$$\left(\text{using } \frac{1}{f(D)}e^{ax}g(x) = e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}g(x)\right)$$

$$\Rightarrow \text{Img}\left(e^{i2x}\frac{1}{D^2+4Di+(2i)^2-4D-8i+4}(3x^2)\right)$$

$$= \text{Img}\left(e^{i2x}\frac{1}{D^2+D(4i-4)-8i}3x^2\right)$$

$$= \text{Img}\left(e^{i2x}\cdot\frac{1}{-8i\left(1-\left(\frac{D^2+D(4i-4)}{8i}\right)\right)}3x^2\right)$$

$$= \text{Img}\left(\frac{e^{i2x}}{(-8i)}\cdot\left(1-\left(\frac{D^2+D(4i-4)}{8i}\right)\right)^{-1}3x^2\right)$$

$$\Rightarrow \text{Img}\left(\frac{e^{i2x}}{-8i}\left(1+\frac{D^2+D(4i-4)}{8i}+\left(\frac{D^2+D(4i-4)}{8i}\right)^2 \ldots\right)3x^2\right)$$

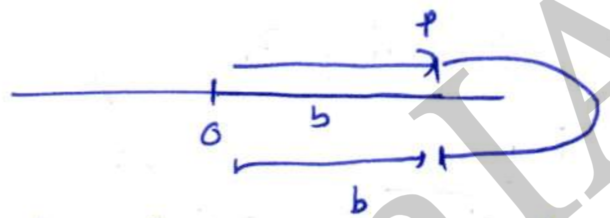
$$\Rightarrow \text{Img}\left(\frac{e^{i2x}}{-8i}\right)\left(1+\frac{D(4i-4)}{8i}+D^2\left(\frac{1}{8i}+\frac{(4i-4)^2}{(8i)^2}\right)\right)3x^2$$

1. (d) एक कण केन्द्र O पर कालांक (आवर्तकाल) T, आयाम a के साथ एक सरल आवर्त गति (S.H.M.) कर रहा है तथा यह एक बिन्दु P से गुजरता है, जहां OP की दिशा में OP = b है। सिद्ध कीजिए कि व्यतीत किया गया समय जब यह P पर वापस लौटता है, $\frac{T}{\pi}\cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ है।

A particle is performing a simple harmonic motion (S.H.M) of period T about a centre O with amplitude a and it passes through a points P where $OP = b$ in the direction OP. Prove that the time which elapse before it returns to P is $\frac{T}{\pi}\cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$. 10

Let SHM be denoted by

$x = a \sin \omega t$ where x is displacement from O. --(1)



Let at t_1 time it was at P, using (1)

$\therefore \; b = a \sin \omega t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{\omega}\sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ --(2)

Now, let

$b = a \sin(\omega t)$

~~Also~~

$\frac{b}{a} = \sin \omega t$

$\therefore \; \omega t = n\pi + (-1)^n \sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

$\left[\because \sin\theta = \sin\alpha \text{ then } \theta = n\pi + (-1)^n \alpha\right]$

For, earliest time

$n = 1$

$\omega t_2 = \pi - \sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

Assuming t_2 is time it come back to P,

$$\therefore t_2 = \frac{1}{\omega}\left(\pi - \sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right) \quad \ldots (3)$$

Now, to find time elapsed $= t_2 - t_1$

using (2), (3)

$$\text{time elapsed} = \frac{1}{\omega}\left(\pi - 2\sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{T}{2\pi}\left(\pi - 2\sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right) \quad \left(\because \omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{T}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{T}{\pi}\cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \quad \left(\because \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1,1]\right)$$

$$\therefore \boxed{\text{Time elapsed} = \frac{T}{\pi}\cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)}$$

1. (e) अंतराल [2, 3] पर $x^4 - 5x^2 + 4$ के अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।
Find the maximum and the minimum values $x^4 - 5x^2 + 4$ on the interval [2, 3]. 10

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

$$f'(x) = 4x^3 - 10x \qquad f''(x) = 12x^2 - 10$$

For extrema

$$f'(x) = 0$$

$$4x^3 = 10x$$

$$x(4x^2 - 10) = 0$$

$$2x(2x^2 - 5) = 0$$

$$\therefore x = 0, \quad x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Now, all point are outside interval.

and $f'(x) = 2x(2x^2 - 5) > 0$ for $x \in [2, 3]$ $\left[\because x > 0 \text{ and } x^2 > 4 \text{ In this interval}\right]$

$\therefore$ It is monotonic increasing in Interval.

$\therefore f(2)$ is minimum and $f(3)$ is maximum.

$$\boxed{f(2) = 0 \text{ is minimum}}$$

and

$$\boxed{f(3) = 40 \text{ is maximum}}$$

$\therefore$ $\boxed{0 \text{ is minimum}}$ and $\boxed{40 \text{ is maximum}}$

2. (a) मान लीजिए V और W, R^4 की निम्न उपसमष्टियां हैं:
V = {(a, b, c, d) : b – 2c + d = 0} और
W = {(a, b, c, d) : a = d, b = 2c}
(i) V, (ii) W, (iii) V ∩ W का आधार और आयाम ज्ञात कीजिए।

Let V and W be the following subspaces of R^4:
$V = \{(a, b, c, d) : b - 2c + d = 0\}$ and
$W = \{(a, b, c, d) : a = d, b = 2c\}$.
Find a basis and the dimension of (i), V, (ii) W, (iii) $V \cap W$. 15

For V)

$$V = \{ (a,b,c,d) : b - 2c + d = 0 \}$$

$$b - 2c + d = 0$$

$$\Rightarrow \frac{b+d}{2} = c$$

$$\therefore (a,b,c,d) = \left(a, b, \frac{b}{2} + \frac{d}{2}, d\right)$$

$$= a(1,0,0,0) + b\left(0,1,\frac{1}{2},0\right) + d\left(0,0,\frac{1}{2},1\right)$$

$$\boxed{\text{Basis of } V = \left\{ (1,0,0,0), \left(0,1,\frac{1}{2},0\right), \left(0,0,\frac{1}{2},1\right) \right\}}$$

$$\boxed{\text{Dim} = |V| = \underline{\underline{3}}}$$

Now for W,

$$W = \{ (a,b,c,d) : a = d, b = 2c \}$$

$$\therefore (a,b,c,d) = (a, 2c, c, a)$$

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

$\Rightarrow (a,b,c,d) = a(1,0,0,1)$

$\qquad + c(0,2,1,0)$

$\therefore \boxed{\text{Basis of } W = \{(1,0,0,1),(0,2,1,0)\}}$

$\boxed{\text{Dim} = |W| = 2}$

Now,

$V \cap W = \{(a,b,c,d) : b - 2c + d = 0,\ a = d,\ b = 2c\}$

$b + d = 2c \ \cdots (1)$ and $a = d \ \cdots (2)$, $b = 2c \ \cdots (3)$

~~2c~~ using (1) & (3),

$\cancel{2c} + d = \cancel{2c} \quad \therefore d = 0$

using (2),

$a = 0$

For $V \cap W$,

$(a,b,c,d) = (0, 2c, c, 0)$

$\qquad = c(0,2,1,0)$

$\therefore \boxed{\text{Basis of } V \cap W = \{(0,2,1,0)\}}$

$\boxed{\text{Dim}(V \cap W) = 1}$

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

2. (b) रूपांतर x + y = u, y = uv का प्रयोग करते हुए, समाकल $\iint \{xy(1-x-y)\}^{1/2}\,dx\,dy$ का सीधी रेखाओं x = 0, y = 0 तथा x + y = 1 के द्वारा परिबद्ध क्षेत्र पर मूल्यांकन कीजिए।

By using the transformation x + y = u, y = uv, evaluate the integral $\iint \{xy(1-x-y)\}^{1/2}\,dx\,dy$ taken over the area enclosed by the straight lines x = 0, y = 0 and x + y = 1. 17

Now, $x + y = u$, $y = uv$

$\exists$

For transformation, calculating Jacobian

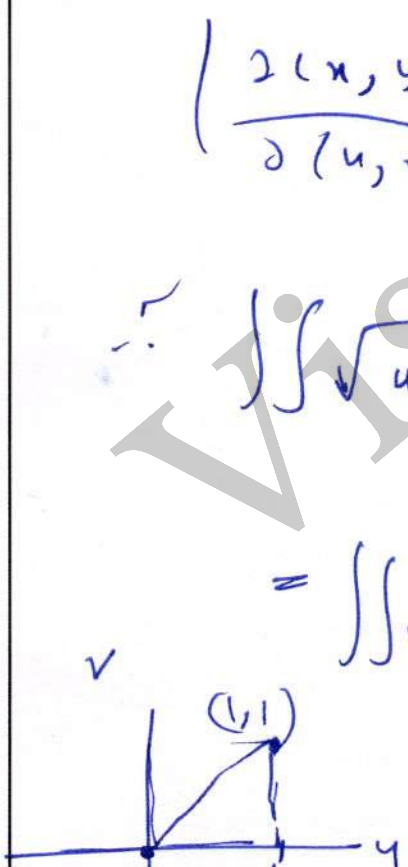
$x = u(1-v)$

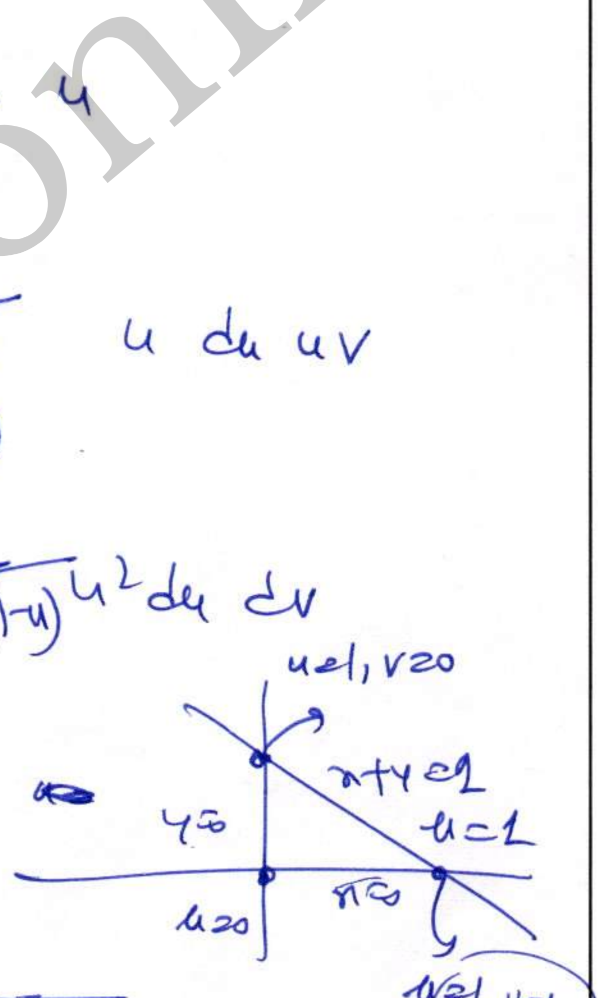
$y = uv$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = u$$

$$\therefore \iint \sqrt{u^2 v(1-v)(1-u)}\quad u\,du\,uv$$

$$= \iint \sqrt{v(1-v)(1-u)}\,u^2\,du\,dv$$





$$= \iint \sqrt{v(1-v)(1-u)}\ \ldots$$

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

2. (c) यदि आधारों {1–x, x(1–x), x(1+x)} और {1, 1 + x, 1 + x²} के सापेक्ष रैखिक रूपांतरण T: $P_2(x) \to P_2(x)$ का आव्यूह निरूपण $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तब T का मान ज्ञात कीजिए।

If $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ is the matrix representation of a linear transformation T: $P_2(x) \to P_2(x)$ with respect to the bases $\{1-x, x(1-x), x(1+x)\}$ and $\{1, 1+x, 1+x^2\}$ then find T. 18

we know that

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

here column represent coordinate of T operate on basis vector

$$T(1-x) = 1(1) + (-2)(1+x) + 1+x^2$$

$$T(x(1-x)) = -1(1) + (1+x) + 2(1+x^2)$$

$$T(x(1+x)) = 2(1) + -1(1+x) + 3(1+x^2)$$

$$T(x - x^2) = -1 + 1 + x + 2 + 2x^2$$

$$= 2x^2 + x + 2 \quad \text{--- (1)}$$

$$T(x + x^2) = 2 - 1 - x + 3 + 3x^2$$

$$= 3x^2 - x + 4 \quad \text{--- (2)}$$

$$T(1 - x) = 1 - 2 - 2x + 1 + x^2$$

$$\cancel{\text{Now } T(x - x^2) + T(x + x^2)} \Rightarrow x^2 - 2x$$

$$\cancel{= T(2x) = 2T(x)}$$

($\because$ T is linear transformation)

$\therefore$ ~~using 1 and 2~~,

$$\cancel{5x^2 + 6 = 2T(x)}$$

$$\therefore T(x) = \cancel{\frac{5x^2}{2} + 3}$$

$$T\big(a(x - x^2) + b(x + x^2) + c(1 - x)\big)$$

$$= a(2x^2 + x + 2) +$$

$b(3x^2 - x + 4) + c(x^2 - 2x)$

7 $\boxed{7\left(x^2(-a+2b) + x(a+b-c) + c\right) = x^2(2a+3b) + x(a-b-2c) + 2a+4b}$

$c=1$ ~~$a+b-c=1$~~

~~$a+b=2$~~ ~~$-a+b=1$~~

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

3: (a) दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c^2}=1$ के बिंदु P से गुजरने वाली अभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिए कि यदि यह $4PG_3$ के समान है, जहां G_3 वह बिंदु है जहां P से गुजरने वाली अभिलंब जीवा xy-समतल से मिलती है, तब दर्शाइए कि P शंकु $\frac{x^2}{a^6}(2c^2-a^2)+\frac{y^2}{b^6}(2c^2-b^2)+\frac{z^2}{c^4}=0$ पर स्थित है।

Find the length of the normal chord through a point P of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

And prove that if is equal to $4PG_3$, where G_3 is the point where the normal chord through P meets the xy-plane, then show that P lies on the cone.

$\frac{x^2}{a^6}(2c^2-a^2)+\frac{y^2}{b^6}(2c^2-b^2)+\frac{z^2}{c^4}=0.$ 15

we know that, Normal ~~chord~~ of ellipsoid at $\boxed{(x_1, y_1, z_1) = P}$

$$\frac{x-x_1}{\frac{x_1 p}{a^2}} = \frac{y-y_1}{\frac{y_1 p}{b^2}} = \frac{z-z_1}{\frac{z_1 p}{c^2}} = r \quad - (1)$$

where $\frac{(x_1)^2}{a^4}+\frac{(y_1)^2}{b^4}+\frac{z_1^2}{c^4} = \frac{1}{p^2}$

Any point on normal ~~chord~~,

$$\left(x_1 + \frac{r x_1 p}{a^2}, y_1 + \frac{r y_1 p}{b^2}, z_1 + \frac{r z_1 p}{c^2}\right)$$

To find point that lie on ellipsoid for this,

$$\frac{\left(x_1 + \frac{r x_1 p}{a^2}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y_1 + \frac{r y_1 p}{b^2}\right)^2}{b^2} + \frac{\left(z_1 + \frac{r z_1 p}{c^2}\right)^2}{c^2} = 1$$

$$= \left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}\right)+\frac{2x_1\left(\frac{rx_1p}{a^2}\right)}{a^2}+\frac{2y_1\left(\frac{ry_1p}{b^2}\right)}{b^2}+\frac{2z_1\left(\frac{rz_1p}{c^2}\right)}{c^2}$$

$$+r^2\left(\frac{x_1^2p^2}{a^6}+\frac{y_1^2p^2}{b^6}+\frac{z_1^2p^2}{c^6}\right)=1$$

Using, $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=1$, as it lie on ellipsoid

$$r\left(\frac{2x_1^2p}{a^4}+\frac{2y_1^2p}{b^4}+\frac{2z_1^2p}{c^4}+r\left(\frac{x_1^2p^2}{a^6}+\frac{y_1^2p^2}{b^6}+\frac{z_1^2p^2}{c^6}\right)\right)=0$$

$$\therefore r = \frac{-1}{p}\left(\frac{\frac{2x_1^2}{a^4}+\frac{2y_1^2}{b^4}+\frac{2z_1^2}{c^4}}{\frac{x_1^2}{a^6}+\frac{y_1^2}{b^6}+\frac{z_1^2}{c^6}}\right) \quad \text{--- (2)}$$

$$\therefore \boxed{\text{length} = |r| = \frac{1}{p}\left(\frac{\frac{2x_1^2}{a^4}+\frac{2y_1^2}{b^4}+\frac{2z_1^2}{c^4}}{\frac{x_1^2}{a^6}+\frac{y_1^2}{b^6}+\frac{z_1^2}{c^6}}\right)}$$

NOW To find, PG_3

Using 1, at G_3 $z=0$ as it lies on chord

$$\frac{0-z_1}{\frac{z_1p}{c^2}}=\delta$$

$$\therefore \quad -\frac{c^2}{p} = r = PG_3 \quad \ldots (3)$$

Now given

Length of chord = $4\ PG_3$

$\therefore$ Using (2) & (3)

$$-\frac{1}{p}\left(\frac{\frac{2x_1^2}{a^4}+\frac{2y_1^2}{b^4}+\frac{2z_1^2}{c^4}}{\frac{x_1^2}{a^6}+\frac{y_1^2}{b^6}+\frac{z_1^2}{c^6}}\right) = 4\left(-\frac{c^2}{p}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}+\frac{z_1^2}{c^4} \Rightarrow 2c^2\left(\frac{x_1^2}{a^6}+\frac{y_1^2}{b^6}+\frac{z_1^2}{c^6}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_1^2}{a^6}(2c^2-a^2)+\frac{y_1^2}{b^6}(2c^2-b^2)+\frac{z_1^2}{c^4} = 0$$

Replacing $(x_1, y_1, z_1) \to (x, y, z)$ for locus

$$\therefore \quad \boxed{\frac{x^2}{a^6}(2c^2-a^2)+\frac{y^2}{b^6}(2c^2-b^2)+\frac{z^2}{c^4} = 0}$$

Desired locus of P

[It is cone as homogenous]

3. (b) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ तब दर्शाइए कि प्रत्येक पूर्णांक n ≥3 के लिए, $A^n = A^{n-2} + A^2 - I$ है। अतः A^{50} का मान ज्ञात कीजिए।

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ show that for every integer $n \geq 3$, $A^n = A^{n-2} + A^2 - I$. Hence determine A^{50}. 15

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

we will find, it characteristic equation

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

∴ By Cayley-Hamilton theorem, matrix will satisfy it characteristic equation

$$\therefore A^3 - A^2 - A + I = 0$$

$$A^3 = A^2 + A - I \quad \text{.-(1)}$$

now, to show that $A^n = A^{n-2} + A^2 - I$

we use induction.

As it is true for $n = 3$,

$A^3 = A^2 + A - I$ ($\because$ using 1)

Now assume, it is true for $n \leq k$

$\therefore A^k = A^{k-2} + A^2 - I$ . . (2)

Now $A^{k+1} = \cancel{A^k . A} = A . A^k$

$= A(A^{k-2} + A^2 - I)$ ($\because$ using 2)

$= A^{k-1} + A^3 - A$

$= A^{k-1} + A^2 - I$

($\because$ using 1, $A^3 = A^2 + A - I$

$\Rightarrow A^2 - I = A^3 - A$)

$= A^{(k+1)-2} + A^2 - I$

$\therefore$ $n = k+1$ satisfy $A^n = A^{n-2} + A^2 - I$

Hence, by induction for $n \geq 3$

$A^n = A^{n-2} + A^2 - I$

Now,

$A^{50} = A^{48} + A^2 - I$

$A^{48} = A^{46} + A^2 - I$

$A^{46} = A^{44} + A^2 - I$

$\vdots$

$A^4 = A^2 + A^2 - I$

Adding all the equation

$\Rightarrow A^{50} = A^2 + 24(A^2 - I)$

$\Rightarrow 25A^2 - 24I \quad \text{-- (5)}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Using (5)

$$A^{50} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 25 & 25 & 0 \\ 25 & 0 & 25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^{50} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 25 & 1 & 0 \\ 25 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

3. (c) एक गोलक S के व्यास के आमने-सामने के सिरों पर बिंदु (0, 1, 0), (3, -5, 2) हैं। गोलक के समीकरण को ज्ञात कीजिए, जिसका गोलक S का समतल 5x - 2y + 4z + 7 = 0 के साथ प्रतिच्छेद एक बृहत् वृत्त के रूप में है।

A sphere S has points $(0, 1, 0)$, $(3, -5, 2)$ at opposite ends of a diameter. Find the equation of the sphere having the intersection of the sphere S with the plane $5x - 2y + 4z + 7 = 0$ as a great circle. 20

By Diameter point form,
equation of sphere

$$(x-0)(x-3) + (y-1)(y+5) + z(z-2) = 0$$

$$x^2 - 3x + y^2 + 4y - 5 + z^2 - 2z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y - 2z - 5 = 0$$

Family
Equation of sphere having intersection of S and P is given by

$$S' = S + \lambda P = 0$$

$S' =$
$$\therefore (x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y - 2z - 5) + \lambda(5x - 2y + 4z + 7) = 0$$

Now, as it is intersection great ~~circle~~

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए Candidates must not write on this margin

Thus, center of S' lies on plane.

$$5x - 2y + 4z + 7 = 0 \quad \text{--- } (1)$$

Now,

$$x^2 + y^2 + z^2 + (5\lambda - 3)x + (4 - 2\lambda)y + z(4\lambda - 2) + 7\lambda - 5 = 0$$

Center is $\frac{-(5\lambda - 3)}{2}, \frac{-(4-2\lambda)}{2}, \frac{-(4\lambda - 2)}{2}$

(Comparing with standard form)

putting center in equation 1

$$5 \cdot \left(\frac{3 - 5\lambda}{2}\right) - 2\left(\frac{2\lambda - 4}{2}\right) + 4\left(\frac{2 - 4\lambda}{2}\right) + 7 = 0$$

$$\frac{15}{2} - \frac{25\lambda}{2} - 2\lambda + 4 + 4 - 8\lambda + 7 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{45}{2} - \frac{45\lambda}{2} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{45}{2} = \frac{45}{2}\lambda$

$\therefore \lambda = 1$

$\therefore$ Equation of sphere is

$$\boxed{x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z+2=0}$$

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

4. (a) xy-समतल में दो वास्तविक चरों के फलन f को

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3\cos\frac{1}{y} + y^3\cos\frac{1}{x}}{x^2+y^2} & \text{for, x, y} \neq 0 \text{ हेतु} \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित कीजिए। (0,0) पर f के सांतत्य और अवकलनीयता की जांच कीजिए।

Define a function f of two real variables in the plane by

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3\cos\frac{1}{y} + y^3\cos\frac{1}{x}}{x^2+y^2} & \text{for, x, y} \neq 0 \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

Check the continuity and differentiability of f at (0,0). 12

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

4. (b) सिद्ध कीजिए कि समीकरण $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ एक शंकु को निरूपित करता है, यदि $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$ है।

Prove that equation $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ represents a cone if $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$. 10

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

4. (c) सिद्ध कीजिए कि, साधारणतः, किसी एक बिंदु से परवलयज $x^2 + y^2 = 2az$ पर तीन अभिलंब बनाए जा सकते हैं, लेकिन यदि बिंदु सतह $27a\,(x^2 + y^2) + 8\,(a - z)^3 = 0$ पर स्थित है, तो इन तीन अभिलंबों में से दो अभिलंब एक ही हैं।

Prove that, is general, three normal can be drawn from a given point to the paraboloid $x^2 + y^2 = 2az$, but if the point lies on the surface

$27a\,(x^2 + y^2) + 8\,(a - z)^3 = 0$

then two of the three normal coincide. 15

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

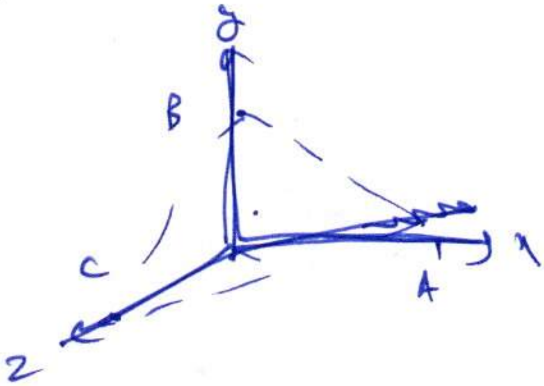
4. (d) $\iint_R \sqrt{|y - x^2|}dxdy$ का मूल्यांकन कीजिए, जहां $R = [-1,1: 0, 2]$

Evaluate $\iint_R \sqrt{|y - x^2|}dxdy$ where $R = [-1,1: 0, 2]$ 13

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

5. (a) एक चर समतल किसी नियत बिंदु (a, b, c) से होकर गुजरता है तथा अक्षों को क्रमशः *A, B* और *C* बिंदुओं पर मिलता है। बिंदुओं *O, A, B* तथा *C* से गुजरते हुए गोले के केंद्र का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए, जहां *O* मूल-बिन्दु है।

A variable plane passes through a fixed point (a, b, c) and meets the axes at points *A*, *B* and *C* respectively. Find the locus of the centre of the sphere passing through the points *O*, *A*, *B* and *C*, *O* being the origin. 10



Let $A = (u, 0, 0)$ $B = (0, v, 0)$ $C = (0, 0, w)$

Now, using intercept form of plane,
Equation of plane

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1$$

As (a, b, c) lie on this

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w} = 1 \quad \ldots (1)$$

Now, we know that equation of sphere passing through origin and A, B, C is

$$x^2 + y^2 + z^2 - ux - vy - wz = 0$$

(Proof in end)

Now, its center is $\left(\frac{u}{2}, \frac{v}{2}, \frac{w}{2}\right)$

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

To find it locus

$$\frac{u}{2}=\alpha,\ \frac{v}{2}=\beta,\ \frac{w}{2}=\gamma$$

putting it in (1),

$$\frac{a}{2\alpha}+\frac{b}{2\beta}+\frac{c}{2\gamma}=1$$

$$\therefore \frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}=2$$

Now, replacing α,β,γ by x,y,z

$$\boxed{\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2}$$ is required locus.

To show, equation of sphere,

$$x^2+y^2+z^2+2t_1x+2t_2y+2t_3z+d=0$$

as it passing through $(0,0,0)$, $(u,0,0)$, $(0,v,0)$, $(0,0,w)$

putting in equation

$d=0$

$u^2+2ut_1=0 \qquad \therefore 2t_1=-u$

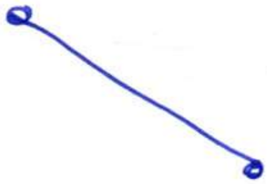
$v^2+2vt_2=0 \qquad 2t_2=-v$

$w^2+2wt_3=0 \qquad 2t_3=-w$

$$\therefore \boxed{x^2+y^2+z^2-ux-vy-wz=0}$$

5. (b) 8 kg भार की एक छड़, ऊर्ध्वाधर तल में एक सिरे पर लगे कब्जे पर चलायमान है। उसके दूसरे सिरे पर लम्बाई l की एक रस्सी के द्वारा कब्जे से b ऊँचाई पर, ऊर्ध्व दिशा में छड़ के आधे के बराबर भार बाँधा गया है। रस्सी में तनाव ज्ञात कीजिए।

A rod of 8kg is movable in a vertical plane about a hinge at one end and another end is fastened with a weight equal to half of the rod, this is fastened by a string of length l to a point at a height b above the hinge vertically. Obtain the tension in the sting. 10



उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

5. (c) सिद्ध कीजिए कि $e^x \cos x + 1 = 0$ के दो वास्तविक मूलों के बीच $e^x \sin x = -1$ का एक वास्तविक मूल स्थित है।
Prove that between two real roots of $e^x \cos x + 1 = 0$, a $real$ $root$ of $e^x \sin x = -1$ lies. 10

WLOG, let a and b be any root of

$e^x \cos x + 1 = 0$

$\therefore e^a \cos a + 1 = 0$ ...(1) and $e^b \cos b + 1 = 0$ ...(2)

Now, assume

$f(x) = \cos x + e^{-x}$

Now as it is continous in $[a, b]$ and differentiable in (a, b)

~~Apply~~ $f(a) = \cos a + e^{-a}$

$\Rightarrow e^a \cos a + 1$

$= 0$ ($\because$ using 1)

$f(b) = \cos b + e^{-b}$

$= e^b \cos b + 1$

$= 0$ ($\because$ using 2)

$\therefore$ By Applying Rolle's theorem,

we have $\exists$ c such $f'(c) = 0$ where $c \in (a, b)$

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

$\therefore f'(x) = -\sin x - e^{-x}$

$\therefore f'(c) = -\sin c - e^{-c} = 0$

$\therefore \sin c + e^{-c} = 0$ where $c \in (a, b)$

$\Rightarrow e^c \sin c + 1 = 0$ -- (3)

Now, By (3)

~~Let now~~

$g(x) = e^x \sin x + 1$

$\therefore g(c) = e^c \sin c + 1 = 0$

$\therefore c$ is root of $e^x \sin x + 1$

and $c \in (a, b) \Rightarrow$ between roots of $f(x)$

$\therefore$ a real root of $e^x \sin x + 1$ is between all real roots of $e^x \cos x + 1$

Hence, proved

5. (d) ध्रुवीय समीकरण $r = a(1-cos\theta), (r,\theta)$ द्वारा दर्शाए गए वक्र समुदाय के लांबिक प्रक्षेप पथ ज्ञात कीजिए, जहां (r, θ) किसी भी बिंदु के समतल ध्रुवीय निर्देशांक हैं।

Determine the orthogonal trajectory of a family of curves represented by the polar equation $r = a(1-cos\theta), (r,\theta)$ being the plane polar coordinates of any point. 10

Given,

$$r = a(1-\cos\theta)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = a\sin\theta$$

~~we know that,~~

~~For orthogonal trajectory, Replacing $\frac{dr}{d\theta}$ by $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ in Differential equation.~~

~~$-r^2\frac{d\theta}{dr}$~~

Now,

$\sin\theta\, r = \frac{dr}{d\theta}(1-\cos\theta)$ is given Differential equation

Replacing $\frac{dr}{d\theta} \rightarrow -r^2\frac{d\theta}{dr}$

$$\sin\theta . r = -r^2\frac{d\theta}{dr}(1-\cos\theta)$$

$$\sin\theta = -r\frac{d\theta}{dr}(1-\cos\theta) \quad (\because r \neq 0)$$

$$\int\frac{dr}{r} = \int\frac{d\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow -\ln r = -\ln(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta) - \ln(\sin\theta) + \ln C$$

$\left(\because \cancel{\tan} \int \frac{dx}{x} = \ln x \text{ and } \int \operatorname{cosec}\theta \, d\theta = \ln|\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta| \right)$

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

$\Rightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{c}{(\sin\theta)(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)}$

$\Rightarrow \quad cr = \sin\theta \left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \right)$

$\Rightarrow \quad \boxed{r = c'(1+\cos\theta)}$ is required orthogonal trajectory

5. (e) यदि $\vec{A} = x^2yz\hat{\imath} - 2xz^3\hat{\jmath} + xz^2\hat{k}, B = 2z\hat{\imath} + y\hat{\jmath} - x^2\hat{k}$, तब $(1,0,-2)$ पर $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\vec{A} + \vec{B})$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $\vec{A} = x^2yz\hat{\imath} - 2xz^3\hat{\jmath} + xz^2\hat{k}, B = 2z\hat{\imath} + y\hat{\jmath} - x^2\hat{k}$ find the value of $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\vec{A} + \vec{B})$ *at* $(1,0,-2)$. 10

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

~~Giv~~ From above value,

$$\vec{A} + \vec{B} = (x^2yz + 2z)\hat{i} + (-2xz^3 + y)\hat{j} + (xz^2 - x^2)\hat{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\vec{A} + \vec{B}) = (x^2z)\hat{i} + (\hat{j}) + 0\hat{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}(\vec{A} + \vec{B})\right) = (2xz)\hat{i}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\vec{A} + \vec{B}) = (2xz)\hat{i}$$

Now given $x = 1, y = 0, z = -2$

$$\therefore \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\vec{A} + \vec{B}) = 2(1)(-2)\hat{i}$$

$$= \boxed{-4\hat{i}}$$

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

6. (a) $(D^4 + D^2 + 1)y = e^{-x/2}cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$ को हल कीजिए।

Solve $(D^4 + D^2 + 1)y = e^{-x/2}cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$. 20

Given,

$$(D^4 + D^2 + 1)y = e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$$

Auxiliary equation

$$m^4 + m^2 + 1 = 0$$

$$\cancel{m^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}}$$

$$m^4 + 2m^2 + 1 - m^2 = 0$$

$$(m^2+1)^2 - m^2 = 0 \Rightarrow (m^2 - m + 1)(m^2 + m + 1) = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \quad \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore \boxed{y_c = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + e^{\frac{1}{2}x}\left(c_3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_4\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)}$$

Now, to find particular integral

$$y_p = \frac{1}{D^4+D^2+1} e^{-x/2} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow e^{-x/2} \frac{1}{\left(D-\frac{1}{2}\right)^4+\left(D-\frac{1}{2}\right)^2+1} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left[\because \frac{1}{f(D)} e^{ax} g(x) = e^{ax}\frac{1}{f(D+a)} g(x)\right]$$

$$\Rightarrow e^{-x/2} \frac{1}{D^4+4D^3\left(-\frac{1}{2}\right)+6D^2\left(-\frac{1}{2}\right)^2+D\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4 + D^2 - D + \frac{1}{4}+1} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow e^{-x/2} \frac{1}{D^4-2D^3+\frac{5}{2}D^2-\frac{9}{8}D+\frac{21}{16}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$D^2 \to -\frac{3}{4} \qquad D^4 \to \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow e^{-x/2}\left(\frac{1}{\frac{9}{16}-2D\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{5}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{9}{8}D+\frac{21}{16}} \cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= e^{-x/2}\left(\frac{1}{\left(\frac{3D}{2}-\frac{9D}{8}\right)+\frac{9}{16}-\frac{15}{8}+\frac{21}{16}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$= e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{\left(\frac{3D}{8}\right)} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{8e^{-\frac{x}{2}}}{3} \frac{1}{D} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)dx$$

$$= \frac{8e^{-\frac{x}{2}}}{3} \frac{\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boxed{y_p = \frac{16e^{-\frac{x}{2}}}{3\sqrt{3}} \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$\therefore y = y_c + y_p$

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

6. (b) समीकरण $(px-y)(py+x) = 2p$, जहां $p = \frac{dy}{dx}$, को क्लैरो समीकरण में समानीत (बदलें) कीजिए और इसे हल कीजिए।

Reduce the equation $(px-y)(py+x) = 2p$, where $p = \frac{dy}{dx}$ to Clairaut's equation and hence solve it. 15

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

Using substitution

$$x^2 = X \qquad y^2 = Y$$

$$p_1 = \frac{dY}{dX} = \frac{2y\,dy}{2x\,dx} = \frac{y}{x}p$$

$$\therefore p = \frac{xp_1}{y}$$

Putting in equation

$$\left(\frac{x^2p_1}{y} - y\right)\left(\frac{xp_1}{y}\cdot y + x\right) = \frac{2xp_1}{y}$$

$$\frac{(x^2p_1 - y^2)}{\cancel{y}}(xp_1 + x) = \frac{2xp_1}{\cancel{y}}$$

$$(x^2p_1 - y^2) = \frac{2p_1}{p_1+1}$$

$$\therefore y^2 = x^2p_1 - \frac{2p_1}{p_1+1}$$

Putting $y^2 = Y$, $x^2 = X$

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

$$Y = XP_1 - \frac{2P_1}{P_1+1}$$

This is clairaut's form

$$\left(\because \; y = px + f(p) \right)$$

$\therefore$ ~~It~~ solution

$$\boxed{Y = Xc - \frac{2c}{c+1}}$$

To find singular solution, we calculate c-discriminant ($\because$ here p discriminant is same, so no need to calculate it)

$$(c+1)y = xc(c+1) - 2c$$

$$(c+1)y = xc^2 + xc - 2c$$

$$xc^2 + c(x-y-2) - y = 0$$

$$\therefore \; (x-y-2)^2 + 4xy = 0$$

$$(x-y)^2 + 4 - 4(x-y) + 4xy = 0$$

2) $x^2+y^2-2xy+4xy+4 = 4x+4y$
$= 0$

$\therefore \boxed{X^2+Y^2+2XY-4X+4Y+4=0}$
Singular solution

Putting $X = x^2$, $Y = y^2$

$\therefore$ General Solution is $\boxed{y^2 = cx^2 - \frac{2c}{c+1}}$

and Singular solution

$\boxed{x^4+y^4+2x^2y^2-4x^2+4y^2+4=0}$

6. (c) लाप्लास रूपांतर का प्रयोग करके, प्रारंभिक मान निर्मेय $y'' - 3y' + 2y = 4t + e^{3t}, y(0) = 1, y'(0) = -1$ को हल कीजिए।
Using Laplace transform, solve the initial value problem $y'' - 3y' + 2y = 4t + e^{3t}, y(0) = 1, y'(0) = -1$. 15

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

Taking Laplace on both sides,

$L(y'') - 3L(y') + 2L(y) = 4L(t) + L(e^{3t})$

($\because$ Laplace is linear operation)

Now WKT, $L(y') = pf(p) - f(0)$ where $f(p) = L(y)$

and $L(y'') = p(pf(p) - f(0)) - f'(0)$

$= p^2 f(p) - pf(0) - f'(0)$

Now using $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

$L(y') = pf(p) - 1$

$L(y'') = p^2 f(p) - p(1) - (-1)$

$= p^2 f(p) - p + 1$

~~$p^2 f(p) - p + 1 - 3(pf(p)$~~

$$p^2 f(p) - p + 1 - 3\left(p f(p) - 1\right) + 2 f(p)$$

$$= \frac{4\,\Gamma 2}{p^2} + \frac{1}{p-3} \qquad \left(\because L(e^{at}) = \frac{1}{p-a}\right)$$

$$= \frac{4}{p^2} + \frac{1}{p-3}$$

$$\left(\because L(t^n) = \frac{\Gamma n+1}{p^{n+1}}\right.$$

$$\therefore L(t) = \frac{\Gamma 2}{p^2}$$

$\cancel{p^2 f(p)}$

$$f(p)\left(p^2 - 3p + 2\right) - p + 1 + 3 = \frac{4}{p^2} + \frac{1}{p-3}$$

$$f(p)(p^2 - 3p + 2) - p + 4 = \frac{4}{p^2} + \frac{1}{p-3}$$

$$f(p)(p^2 - 3p + 2) = p - 4 + \frac{4}{p^2} + \frac{1}{p-3}$$

$$f(p) = \frac{p-4}{(p-2)(p-1)} + \frac{4}{p^2(p-2)(p-1)} + \frac{1}{(p-3)(p-2)(p-1)}$$

$$\frac{p-4}{(p-2)(p-1)} = \frac{a}{(p-2)} + \frac{b}{(p-1)}$$

$$(p-4) = a(p-1) + b(p-2)$$

$p = 1 \quad -3 = -b \quad \underline{b = 3}$

$p = 2 \quad \underline{-2 = a}$

$$\frac{4}{p^2}\left(\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}\right)$$

$$+ \frac{1}{(p-3)}\left(\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}\right)$$

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

$$\Rightarrow \frac{3}{p-1} - \frac{2}{p-2} + \frac{4}{p^2(p-2)} - \frac{4}{p^2(p-1)} + \frac{1}{p-3} - \frac{1}{p-2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-3} - \frac{1}{p-1}\right)$$

$$\frac{4}{p^2(p-2)} = \frac{-p-2}{p^2} + \frac{1}{(p-2)} = \frac{1}{p-2} - \left(\frac{p+2}{p^2}\right)$$

$$\frac{4}{p^2(p-1)} = 4\left(\frac{-p-1}{p^2} + \frac{1}{p-1}\right) = 4\left(\frac{1}{p-1} - \left(\frac{p+1}{p^2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{p-1} - \frac{2}{p-2} + \frac{1}{p-2} - \frac{(p+2)}{p^2} - \frac{4}{p-1} + 4\left(\frac{p+1}{p^2}\right) + \frac{1}{p-3} - \frac{1}{p-2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-3} - \frac{1}{p-1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p-1}\left(3 - 4 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{p-2}\left(-2+1-1\right) + \frac{1}{p}\left(-1+4\right) + \frac{1}{p^2}\left(-2+4\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-3}\right)$$

$$f(t) = -\frac{3}{2}e^t - 2e^{2t} + 3 + 2\frac{t}{2} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

$$\boxed{f(t) = t + \frac{e^{3t}}{2} - 2e^{2t} - \frac{3}{2}e^t + 3}$$

Answer

$$\therefore f(p) = \frac{1}{p-1}\left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{p-2}(-2) + \frac{1}{p}(3) + \frac{1}{p^2}(2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-3}\right)$$

7. (a) एक पिण्ड एक शंकु और उसके नीचे अर्धगोले से बना है। शंकु के आधार तथा अर्धगोले के शिखर का अर्धव्यास (त्रिज्या) a समान है। पूरा पिण्ड एक रूक्ष क्षैतिज मेज पर रखा है, जिसका अर्धगोला मेज को स्पर्श करता है। दर्शाइए कि शंकु की अधिकतम ऊंचाई, जिससे कि साम्यावस्था स्थिर बनी रहे, $\sqrt{3}a$ है।

A body consists of a cone and underlying hemisphere. The base of the cone and the top of the hemisphere have same radius a. The whole body rests on a rough horizontal table with hemisphere in contact with the table. Show that the greatest height of the cone, so that the equilibrium may be stable, is $\sqrt{3}a$. 15

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

7. (b) एक चार पहियों वाला रेलवे ट्रक, जिसका कुल द्रव्यमान M है, के पहिए और धुरी के हर युग्म का द्रव्यमान व परिभ्रमण त्रिज्या क्रमशः m तथा k है। हर पहिए की त्रिज्या r है। यदि ट्रक को बल P द्वारा सीधे पथ (ट्रैक) पर धकेला जाता है, तब सिद्ध कीजिए कि उसका त्वरण $\frac{P}{M+\frac{2mk^2}{r^2}}$ है तथा ट्रक द्वारा प्रत्येक धुरी पर लगाए गए क्षैतिज बल का मान ज्ञात कीजिए। धुरी घर्षण व हवा का प्रतिरोध नगण्य है।

A four-wheeled railway truck has a total mass M, the mass and radius of gyration of each pair of wheels and axle are m and k respectively, and the radius of each wheel is r. Prove that if the truck is propelled along a level track by a force P, the acceleration is $\frac{P}{M+\frac{2mk^2}{r^2}}$ and find the horizontal force exerted on each axle by the truck. The axle friction and wind resistance are to be neglected. 15

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

7. (c) $2l$ लम्बाई का एक तार (केबिल) जिसका भार w प्रति इकाई (यूनिट) लम्बाई है, एक क्षैतिज रेखा के दो बिंदुओं **P** और **Q** से लटकी हुई है। दर्शाइए कि तार का प्रसार (स्पैन) $2l\left(1 - \frac{2h^2}{3l^2}\right)$ है, जहां **h** तार के कसकर खींची हुई स्थिति में मध्य का झोल (सैग) है।

A cable of weight w per unit length and length $2l$ hangs from two points **P** and **Q** in the same horizontal line. Show that the span of the cable is $2l\left(1 - \frac{2h^2}{3l^2}\right)$, where **h** is the sag in the middle of the tightly stretched position. 20

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

8. (a) फ्रेनेट-सेरेट फॉर्मूले व्युत्पन्न कीजिए। आकाश वक्र के लिए वक्रता और विमोटन की परिभाषा दीजिए। आकाश वक्र $x = t, y = t^2, z = \frac{2}{3}t^3$ के लिए उनका परिकलन कीजिए। दर्शाइए कि इस वक्र के लिए वक्रता और विमोटन बराबर हैं।

Derive the Frenet-Serret formulae. Define the curvature and torsion for a space curve. Compute them for the space curve $x = t, y = t^2, z = \frac{2}{3}t^3$. Show that the curvature and torsion are equal for this curve. 20

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

8. (b) दर्शाइए कि वक्र $\vec{x}(t) = t\hat{\imath} + \left(\frac{1+t}{t}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{1-t^2}{t}\right)\hat{k}$ एक समतल में स्थित है।

Show the curve $\vec{x}(t) = t\hat{\imath} + \left(\frac{1+t}{t}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{1-t^2}{t}\right)\hat{k}$ lies in a plane. 8

8. (c) स्थिरांक a, b और c के किन मानों के लिए सदिश $\vec{V} = (x + y + az)\hat{\imath} + (bx + 2y - z)\hat{\jmath} + (-x + cy + 2z)\hat{k}$ अघूर्णी है। इन मानों के साथ इस सदिश के बेलनाकार निर्देशांकों में विचलन (अपसारिता) ज्ञात कीजिए।

For what values of the constant a, b and c, the vector $\vec{V} = (x + y + az)\hat{\imath} + (bx + 2y - z)\hat{\jmath} + (-x + cy + 2z)\hat{k}$ is irrotational. Find the divergence in cylindrical coordinates of the vector with these values. 10

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

8. (d) $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$, का मूल्यांकन कीजिए, जहां C xy-समतल में एक स्वेच्छ बंद वक्र है और $\vec{F} = \frac{-y\hat{i}+x\hat{j}}{x^2+y^2}$ है।

Evaluate $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$, where C is an arbitrary closed curve in the xy-plane and $\vec{F} = \frac{-y\hat{i}+x\hat{j}}{x^2+y^2}$. 12

उम्मीदवारों को इस हाशिए में नहीं लिखना चाहिए
Candidates must not write on this margin

SPACE FOR ROUGH WORK

SPACE FOR ROUGH WORK

$A^n = A^{n-2} + A^2 - I$

$A^4 = A^2 + A^2 - I$

$A^6 = A^4 + A^2 - I$

$= A^2 + 2(A^2 - I)$

$A^8 = A^6 + A^2 - I$

$= A^2 + 3(A^2 - I)$

$5\left(\frac{-5\lambda + 3}{2}\right) + 8(4 - 2\lambda)$

$- 2(4\lambda - 2)$

$+ 720$

$-\frac{25\lambda}{2} + \frac{15}{2} + 4 - 2\lambda - 8\lambda$

$+ 4 + 720$

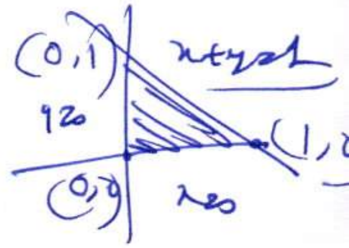
SPACE FOR ROUGH WORK

$$\iint \sqrt{xy(1-x-y)}$$

$x+y=u \quad y=uv$

$x+uv=u$

$x=u(1-v)$
$y=uv$



$$\iint \sqrt{u(1-v)(1-u)uv}\; dx\,dy$$

$u(\cancel{1-v})$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\sqrt{u(1-v)\,uv(1-u)}$$

$$= \begin{vmatrix} (1-v) & v \\ u(-1) & u \end{vmatrix}$$

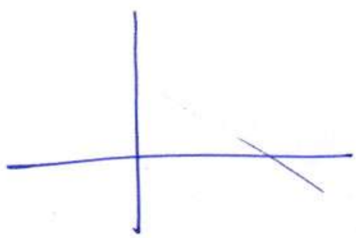
$$dx\,dy = \frac{J(x,y)}{J(r,\theta)}\, dr\, d\theta$$

$= u - \cancel{uv} + \cancel{uv}$

$$dx\,dy = \frac{J(x,y)}{J(u,v)}\, du\, dv \quad (u)$$

$$\iint \sqrt{(1-u)u^2 v(1-v)}\; u\, du\, dv$$

$$\iint \sqrt{(1-u)(1-v)v}\; u^2\, du\, dv$$



$$\frac{5x^2}{2}+3$$

$$\frac{5(1-x)^2}{2}+3 = \frac{5}{2}(1+x^2-2x)+3$$